

Über Fehlerabschätzungen und deren Schärfe bei Finite-Elemente-Verfahren

Dies ist eine elektronische Fassung der im Shaker-Verlag als Buch (ISBN 3-8265-2628) erschienenen, von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Naturwissenschaften genehmigten
Dissertation

vorgelegt von
Diplom-Mathematiker
Steffen Johannes Goebbels
aus Kevelaer

Referent: Universitätsprofessor Dr. R.J. Nessel

Korreferent: Universitätsprofessor Dr. H. Esser

Tag der mündlichen Prüfung: 9. Mai 1997

D 82 (Diss. RWTH Aachen)

Die vorliegende Arbeit entstand am Lehrstuhl A für Mathematik unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. R.J. Nessel. Ich möchte mich bei ihm ganz herzlich für die engagierte Betreuung bedanken. Er hat mein Studium von Beginn an maßgeblich geprägt und meine Ausbildung seitdem stark gefördert. Ohne die zahlreichen Gespräche und seine konstruktiven Hinweise wäre diese Arbeit nicht denkbar. Ebenso bedanke ich mich aufrichtig bei Herrn Prof. Dr. H. Esser vom Institut für Geometrie und Praktische Mathematik, der freundlicherweise das Korreferat übernahm und mir darüber hinaus während der Erstellung der Arbeit wertvolle Anregungen und Ratschläge gegeben hat. Sehr angenehm war auch die freundschaftliche Zusammenarbeit mit allen Mitarbeitern des Lehrstuhls A für Mathematik, insbesondere mit den Herren Dipl.-Math. S. Mainz und Dipl.-Math. R. Zeler.

In besonderer Weise möchte ich mich auch bei der Graduiertenförderung des Landes Nordrhein-Westfalen für die mir gewährte finanzielle Unterstützung bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Grundlagen	12
2.1	Funktionsräume	12
2.1.1	Stetige und differenzierbare Funktionen	12
2.1.2	Geometrische Eigenschaften	14
2.1.3	Sobolev-Räume	15
2.2	Stetigkeitsmoduln und K-Funktionale	20
2.3	Reelle Interpolation von Banach-Räumen	28
2.4	Resonanzprinzipien und ein Umkehrsatz	30
2.5	Variationsaufgaben im Hilbert-Raum	35
3	Finite Elemente und globale Fehlerschranken	39
3.1	Das schwache Problem	39
3.2	Die Finite-Elemente-Methode	42
3.2.1	Finite Elemente	42
3.2.2	Triangulierungen und Ansatzfunktionen	46
3.2.3	Affine Transformation, Referenzelement	52
3.2.4	Die diskretisierte Aufgabe	56
3.3	Fehlerschranken in der L^2 -Norm	57
3.3.1	Eine a-priori-Schranke	57
3.3.2	Bramble-Hilbert-Lemma und Abschätzungen auf einem Referenzelement	59
3.3.3	Der globale Lagrange-Interpolationsfehler	61
3.3.4	Ein Quasi-Interpolationsoperator	63
3.3.5	Beweis der a-priori-Schranke	68

3.4	Fehlerschranken mittels der Normen fraktionierter Sobolev-Räume . . .	69
3.5	Fehlerschranken in negativen Normen	71
3.6	Der Fehler in der Supremum-Norm	72
4	Schärfe der globalen Fehlerschranken	76
4.1	Umkehrresultate	76
4.1.1	Geschachtelte Ansatzfunktionenräume	77
4.1.2	Triangulierungen mit Mixing-Bedingungen	84
4.2	Gegenbeispiele: L^2 -und Supremum-Normen	90
4.2.1	Der Fall $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(\delta)/\delta = \infty$	90
4.2.2	Schärfe der Jackson-Ungleichung (3.82)	102
4.2.3	Der Fall $\omega(\delta) = \delta$	103
4.3	Gegenbeispiele: Negative Normen	106
4.4	Gegenbeispiele: Lineare Ansatzfunktionen und Supremum-Norm	111
5	Superkonvergenz	127
5.1	Superkonvergenz in den Knoten	127
5.2	Superkonvergenz in inneren Punkten der Zerlegung	143
Anhang		
A	Beweis des Äquivalenzsatzes	153
A.1	Die ersten Ungleichungen	154
A.2	Glätten mit Steklov-Mitteln	155
A.3	Teilung der Einheit	161
A.4	Bramble-Hilbert-Lemma und äquivalente K-Funktionale	170
A.5	Beweis des Satzes	175
B	Eine Anfangs-Randwertaufgabe	177
B.1	Eine Semi-Diskretisierung	178
B.2	Eine volle Diskretisierung	185
Symbolverzeichnis		188
Index		192
Literaturverzeichnis		194

Kapitel 1

Einleitung

Zur numerischen Lösung von Differentialgleichungen stehen vielfältige Methoden zur Verfügung. Bei den Differenzenverfahren werden auf einem endlichen Gitter die Ableitungen des Differentialoperators durch Differenzenquotienten ersetzt, so daß nur noch ein lineares Gleichungssystem gelöst werden muß. Bei partiellen Differentialgleichungen auf allgemeinen Gebieten kann es jedoch schwierig sein, diese Form der Diskretisierung in der Nähe des Gebietsrandes zu erklären. Auch ist hier die Frage nach der Stabilität, d.h. der stetigen Abhängigkeit der Näherungslösung von den Ausgangsdaten der Differentialgleichung, unübersichtlich. Diese Schwierigkeiten übertragen sich auf Konvergenzuntersuchungen und die Angabe geeigneter Fehlerabschätzungen. Das hat zum großen Erfolg eines anderen Verfahrens, der sogenannten Finite-Elemente-Methode, beigetragen, die hauptsächlich bei Randwertproblemen elliptischer Differentialgleichungen eingesetzt wird. Dabei wird die Differentialgleichung zunächst mittels partieller Integration in ein Variationsproblem (schwaches Problem) überführt, dessen Lösbarkeit bekannt ist. Die Diskretisierung des Variationsproblems geschieht durch den Übergang zu endlich-dimensionalen Räumen, den Ansatzfunktionenräumen. Der Name der Methode resultiert aus der konkreten Wahl dieser Räume: Das Definitionsgebiet wird in einfache Teilgebiete, den Finiten Elementen, zerlegt (trianguliert), und die Elemente der Ansatzfunktionenräume sind stückweise auf den Teilgebieten erklärt (Splines). Die Stabilität des Verfahrens ist bereits durch seine Konstruktion gewährleistet, und es steht eine abstrakte Theorie für Fehlerabschätzungen zur Verfügung.

Gegenstand dieser Arbeit sind a-priori-Fehlerabschätzungen bei der Finite-Elemente-Methode. Die in der Literatur üblichen Fehlerschranken stellen höhere Anforderungen an die Regularität der exakten Lösungen, als dies durch die Eigenschaften der Differentialgleichung bzw. der Variationsformulierung begründet werden kann. Sie entsprechen den in der Approximationstheorie bekannten Jackson-Typ-Ungleichungen (Endpunktabschätzungen). Das erste Ziel ist es daher, die gängigen Fehlerschranken ohne zusätzliche Regularitätsvoraussetzungen auszudrücken. Hier erweisen sich Stetigkeitsmoduln als ein geeignetes Hilfsmittel. Dabei führen die bekannten Fehlerschranken zunächst auf Abschätzungen gegen K-Funktionale, und es gilt, bekannte K-Funktional-Techniken so

zu erweitern, daß die K-Funktionale ihrerseits durch Stetigkeitsmoduln ersetzt werden können. Aus approximationstheoretischer Sicht ist es jetzt naheliegend, nach der Güte dieser neuen Fehlerschranken zu fragen, d.h., es interessieren Abschätzungen des Fehlers nach unten. Auch aus der Sicht der Numerik ist diese Fragestellung von Bedeutung, worauf Braess in [6, S.79] hinweist. Er sieht in Umkehrsätzen vom Bernstein-Typ die passende Antwort. Allerdings erweist sich die Regularität der Ansatzfunktionenräume als zu gering, um in vielen üblichen Situationen eine Aussage machen zu können. Völlig anders ist die Lage beim Schärfenachweis über Gegenbeispiele, die sich mit den Resonanzprinzipien vom Banach-Steinhaus'schen Typ und ihren quantitativen Erweiterungen, wie sie von Dickmeis, Nessel und van Wickeren [29]–[34] entwickelt worden sind, angeben lassen. Hiermit können auch interessante Phänomene wie höhere Konvergenzordnungen in negativen Normen, das Auftreten eines log-Faktors bei Supremum-Norm-Abschätzungen und Superkonvergenz analysiert werden.

Bei Differenzenverfahren wurden ähnliche Fragestellungen in [11]–[15], [42]–[44], [67, 68] untersucht. Erste Betrachtungen zur Optimalität von K-Funktional-Fehlerschranken bei Finiten Elementen diskutiert Lüttgens in [67]. Daneben gibt es eine Reihe weiterer Publikationen, die sich in der einen oder anderen Weise mit der Güte von Fehlerschranken zu Finite-Elemente-Methoden beschäftigen, z.B. [3, 4, 36, 47, 52, 97].

In Beispielsituationen sollen nun die Ergebnisse dieser Arbeit etwas genauer zusammengefaßt werden. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein (gegebenenfalls konvexes) beschränktes Gebiet, das durch einen Polygonzug berandet ist. Die Einschränkung auf die Raumdimension 2 ist (außer bei Supremum-Norm-Fehlerschranken) nicht wichtig und hier nur der Übersichtlichkeit halber gewählt. Mit $W^{s,p}(\Omega)$ bezeichnen wir den Sobolev-Raum der Funktionen mit schwachen Ableitungen bis zur Ordnung s in $L^p(\Omega)$, versehen mit der Norm $\|u\|_{s,p,\Omega} := [\sum_{j=0}^s |u|_{j,p,\Omega}^p]^{1/p}$, die über die Halbnormen $|u|_{j,p,\Omega} := [\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p]^{1/p}$ definiert ist. Dabei wird die übliche Multiindex-Notation für $\alpha \in \mathbb{N}_0^2$ verwendet (siehe Symbolverzeichnis), und für den Fall $p = \infty$ sei auf (2.2) verwiesen. Der Raum $W_0^{1,p}(\Omega)$ bestehe aus den Funktionen $u \in W^{1,p}(\Omega)$, die zusätzlich die Randbedingung $u|_{\partial\Omega} = 0$ im Sinne eines Spur-Operators erfüllen (siehe Charakterisierung (2.5)). Auf $W_0^{1,2}(\Omega)$ sei die Bilinearform

$$a(u, v) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} \int_{\Omega} a_{\alpha, \beta}(x) (D^\alpha u(x)) (D^\beta v(x)) dx, \quad u, v \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

gegeben, die sich z.B. aus der partiellen Integration einer elliptischen Differentialgleichung ergibt. Die Eigenschaften der Bilinearform werden im folgenden als hinreichend regulär vorausgesetzt, d.h., die Koeffizientenfunktionen $a_{\alpha, \beta}$ sind genügend glatt und die Bilinearform ist beschränkt und koerziv (siehe Definition 2.34). Der Ausgangspunkt der Finite-Elemente-Methode ist dann das folgende Variationsproblem, das nach dem Satz von Lax und Milgram eindeutig lösbar ist: Zu $f \in L^2(\Omega)$ ist eine Funktion $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gesucht mit

$$a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} f(x)v(x)dx \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (1.1)$$

Die Diskretisierung besteht nun darin, diese Aufgabe nur auf endlich-dimensionalen Teilräumen V_h von $W_0^{1,2}(\Omega)$ zu betrachten. Die Ansatzfunktionenräume $V_h \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ bestehen aus stückweisen Polynomen vom Grad r , die über eine Triangulierung \mathcal{T}_h definiert sind. Dabei verhalte sich die Größe der Triangulierungsdreiecke entsprechend dem Parameter h gleichmäßig regulär, d.h., es mögen Konstanten $0 < c, C < \infty$ existieren, so daß die Inkreisdurchmesser der Dreiecke von \mathcal{T}_h größer als ch und die Durchmesser der Dreiecke kleiner als Ch sind ($0 < h \leq 1$). Das Folgende gilt auch bei Verwendung anderer üblicher Ansatzfunktionenräume, z.B. bei Rechteck- und Serendipity-Elementen. Jetzt wird eine Näherungslösung u_h im Ansatzfunktionenraum gesucht:

$$a(u_h, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V_h. \quad (1.2)$$

Nach dem Lemma von Céa verhält sich der Approximationsfehler $u - u_h$ wie der Fehler der besten Approximation in der $W^{1,2}(\Omega)$ -Norm (siehe z.B. [21, S.113] bzw. Satz 2.37):

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leq C \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{1,2,\Omega}.$$

In der Literatur ist es nun üblich, diesen Fehler der besten Approximation für glatte Lösungen u durch konkretes Einsetzen eines $v = v(u) \in V_h$, das z.B. ein Lagrange-Interpolant sein kann, mit einer Ordnung zu versehen. Es ergibt sich daraus eine Jackson-Typ-Ungleichung der Form

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leq Ch^r |u|_{r+1,2,\Omega} \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{r+1,2}(\Omega). \quad (1.3)$$

In der Regel werden die Lösungen u nicht in $W^{r+1,2}(\Omega)$ liegen. Mittels reeller Banach-Raum-Interpolation lassen sich aber unmittelbar auch Abschätzungen für Lösungen u aus fraktionierten Sobolev-Räumen $W^{\nu,2}(\Omega)$, $2 \leq \nu \leq r+1$, gewinnen (fraktionierte Sobolev-Räume ergeben sich durch Interpolation aus den klassischen, siehe auch Satz 2.27):

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leq Ch^{\nu-1} \|u\|_{\nu,2,\Omega} \quad \forall u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{\nu,2}(\Omega). \quad (1.4)$$

Wie in [9, S.283] (vgl. [4], siehe (1.12) und Kapitel 3.4) bemerkt wird, sind diese Fehlerschranken aber noch in Abhängigkeit von u verbesserbar. Mit dem K-Funktional

$$K\left(\delta, u, (W^{s,p}(\Omega), |\cdot|_{s,p,\Omega}), (W^{r+s,p}(\Omega), |\cdot|_{r+s,p,\Omega})\right) := \inf_{g \in W^{s,p}(\Omega)} \left[|u - g|_{s,p,\Omega} + \delta |g|_{r+s,p,\Omega} \right]$$

lassen sich dagegen aber Fehlerschranken angeben, die ohne zusätzliche Forderungen an u gelten und die, wie sich zeigen wird, nicht verbesserbar sind:

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leq ChK\left(h^{r-1}, u, (W^{2,2}(\Omega), |\cdot|_{2,2,\Omega}), (W^{r+1,2}(\Omega), |\cdot|_{r+1,2,\Omega})\right). \quad (1.5)$$

Für diese Abschätzung wird nur benötigt, daß $u \in W^{2,2}(\Omega)$ ist. Diese Glattheit ist aber nach einem Regularitätssatz für Lösungen der Aufgabe (1.1) gewährleistet (siehe Satz 3.1). Ist zusätzlich $u \in W^{r+1,2}(\Omega)$, so folgt aus den Eigenschaften des K-Funktional

auch die Schranke (1.3), die damit in (1.5) enthalten ist. Es ist allerdings wünschenswert, das K-Funktional durch eine konkretere Größe zu ersetzen. In der Approximationstheorie sind Stetigkeitsmoduln das übliche Maß für die Glattheit von Funktionen, und für eine Reihe von K-Funktionalen ist bekannt, daß sie zu entsprechenden Stetigkeitsmoduln äquivalent sind. In Erweiterung dieser bekannten Ergebnisse wird hier für beschränkte Gebiete Ω , die einen Lipschitz-Rand besitzen, gezeigt, daß Konstanten $0 < c, C < \infty$ existieren, so daß für alle $0 < \delta \leq 1$ und $u \in W^{s,p}(\Omega)$ gilt ($r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p < \infty$):

$$\begin{aligned} c \omega_r^{(s)}(\delta, u, L^p(\Omega)) &\leq K\left(\delta^r, u, (W^{s,p}(\Omega), |\cdot|_{s,p,\Omega}), (W^{r+s,p}(\Omega), |\cdot|_{r+s,p,\Omega})\right) \\ &\leq C \omega_r^{(s)}(\delta, u, L^p(\Omega)). \end{aligned}$$

Dabei ist der (radiale) Stetigkeitsmodul definiert über

$$\omega_r^{(s)}(\delta, u, L^p(\Omega)) := \sum_{|\alpha|=s} \omega_r(\delta, D^\alpha u, L^p(\Omega)) := \sum_{|\alpha|=s} \sup_{|\nu| \leq \delta} \|\Delta_\nu^r D^\alpha u\|_{L^p(\Omega(r\nu))},$$

wobei $\Delta_\nu^r u(x) := \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} u(x+j\nu)$ und $\Omega(\nu) := \{x \in \Omega : x+t\nu \in \Omega, 0 \leq t \leq 1\}$. Diese im Anhang bewiesene Äquivalenz ist eine Erweiterung einer Aussage von John und Scherer aus [59], die den Fall $s = 0$ untersuchen. Beim Beweis werden weitere K-Funktionale eingeführt, die ihrerseits als Konsequenz des Lemmas von Bramble und Hilbert zu den hier angegebenen äquivalent sind.

Die Fehlerschranke (1.5) läßt sich mit dem Äquivalenzsatz umformulieren zu ($r > 1$)

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leq Ch \omega_{r-1}^{(2)}(h, u, L^2(\Omega)). \quad (1.6)$$

Wie üblich erhält man daraus mit dem Nitsche-Trick auch eine Abschätzung in der L^2 -Norm (siehe Satz 2.39):

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \omega_{r-1}^{(2)}(h, u, L^2(\Omega)). \quad (1.7)$$

Unter weiteren Voraussetzungen an das Ausgangsproblem (1.1), die zusätzliche Regularität der Lösungen sichern (vgl. Satz 3.25), erhält man mit dem Nitsche-Trick auch Fehlerschranken in den negativen Normen

$$\|u\|_{-s,2,\Omega} := \sup_{0 \neq v \in W^{s,2}(\Omega)} \frac{(u, v)_{L^2(\Omega)}}{\|v\|_{s,2,\Omega}},$$

die eine noch höhere Konvergenzordnung haben:

$$\|u - u_h\|_{-s,2,\Omega} \leq Ch^{s+2} \omega_{r-1}^{(2)}(h, u, L^2(\Omega)). \quad (1.8)$$

Ein Hauptanliegen dieser Arbeit ist nun die Untersuchung der Güte der Fehlerschranken (1.6)–(1.8) und damit die Rechtfertigung der Verwendung der Stetigkeitsmoduln.

Es gibt dazu zwei verschiedene Ansätze, die in Kapitel 4 diskutiert werden: Umkehrsätze und Gegenbeispiele. Bei den Umkehrsätzen, die in [6, S.79] vorgeschlagen werden, schließt man aus dem Verhalten des Fehlers auf das des Glattheitsmaßes, hier des Stetigkeitsmoduls. So ist z.B. (1.7) nicht verbesserbar in dem Sinne ($0 < \nu \leq 1$, vgl. (4.24))

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(h^{2+\nu(r-1)}) \implies \omega_{r-1}^{(2)}(\delta, u, L^2(\Omega)) = \mathcal{O}(\delta^{\nu(r-1)}). \quad (1.9)$$

Allerdings sind zum Beweis dieser Aussage Einschränkungen an die Familie der Ansatzfunktionenräume erforderlich. Genauer müssen die Triangulierungen einer Mixing-Bedingung genügen (vgl. [24]). Dabei werden aber Familien von Triangulierungen ausgeschlossen, die durch sukzessives Verfeinern bereits vorhandener Dreiecke aufgebaut werden, so wie dies in vielen Algorithmen geschieht und für Konditionsverbesserungen der bei der konkreten Anwendung der Methode auftretenden Steifigkeitsmatrizen wichtig ist. Ohne zusätzliche Voraussetzungen sind Umkehraussagen wie (1.9) nicht zu erwarten: Die Elemente der Ansatzfunktionenräume sind i.a. nur einmal schwach differenzierbar und damit wenig glatt. Die Lösungen u liegen dagegen nach Regularitätssätzen oft schon in $W^{2,2}(\Omega)$ und sind damit glatter. Die Güte, mit der u durch weniger reguläre Funktionen u_h approximiert werden kann, sagt daher wenig über eine zusätzliche Glattheit von u aus. Demzufolge gewinnt der Ansatz des Schärfenachweises über Gegenbeispiele an Bedeutung:

Seien $\{R_h : h > 0\}$ eine Familie nicht-negativ-wertiger Fehlerfunktionale und $\{S_\delta : \delta > 0\}$ eine Familie nicht-negativ-wertiger Glattheitsmaße (Funktionale) auf einem (Banach-) Raum X . Weiter sei φ eine positive Funktion mit $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \varphi(\delta) = 0$, die die Konvergenzordnung ausdrücken soll. Wir nennen eine Fehlerabschätzung $R_h u \leq C S_h u$ **scharf im Sinne eines Gegenbeispiels bezüglich φ** (vgl. [72, S.108]), falls ein Gegenbeispiel $u_\varphi \in X$ existiert mit ($\delta \rightarrow 0+$, $h \rightarrow 0+$)

$$S_\delta u_\varphi = \mathcal{O}(\varphi(\delta)) \quad (1.10)$$

$$R_h(u_\varphi) \neq o(\varphi(h)); \quad (1.11)$$

mit anderen Worten, für dieses u_φ kann die Ordnung der Fehlerschranke nicht von $\mathcal{O}(\varphi(h))$ zu $o(\varphi(h))$ verbessert werden. Falls $S_\delta u_\varphi \neq 0$, $\delta > 0$, gilt dann also

$$C \geq \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{R_h u_\varphi}{S_h u_\varphi} \stackrel{(1.10)}{\geq} c \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{R_h u_\varphi}{\varphi(h)} \stackrel{(1.11)}{>} 0.$$

Wir haben bereits darauf hingewiesen, daß die Abschätzung (1.4) in Abhängigkeit der Lösung u verbesserbar ist. Genauer liegt hier keine Schärfe im Sinne eines Gegenbeispiels bezüglich $\varphi(\delta) = \delta^{\nu-1}$, $\nu < r+1$, vor, wenn wir die Daten $X = W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{\nu,2}(\Omega)$, $S_\delta = \delta^{\nu-1} \|\cdot\|_{\nu,2,\Omega}$ und $R_h u = \|u - u_h\|_{1,2,\Omega}$ wählen. Wir können dabei davon ausgehen, daß jedes $u \in X$ Lösung einer Aufgabe (1.1) mit geeigneter Inhomogenität $f = f_u \in L^2(\Omega)$ ist (siehe Lemma 4.13). Es ist also (siehe (3.83))

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{\|u - u_h\|_{1,2,\Omega}}{h^{\nu-1} \|u\|_{\nu,2,\Omega}} = 0 \quad \forall 0 \neq u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{\nu,2}(\Omega), \quad (1.12)$$

d.h. $\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} = o(h^{\nu-1})$. Andererseits gilt jedoch (vgl. Kapitel 4.2.2)

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \left[\sup_{0 \neq u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{\nu,2}(\Omega)} \frac{\|u - u_h\|_{1,2,\Omega}}{h^{\nu-1} \|u\|_{\nu,2,\Omega}} \right] > 0, \quad (1.13)$$

eine Aussage, die in [72, S.108] als **Schärfe auf der Klasse** bezeichnet wird. Damit kann die Konvergenzordnung $h^{\nu-1}$ in (1.4) nicht unabhängig von der konkreten Lösung u erhöht werden. Durch Auflösen des Limes-Superiors und des Supremums sieht man sofort, daß (1.13) äquivalent ist mit der Existenz einer Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{\nu,2}(\Omega)$, $u_n \neq 0$, die die Bedingung

$$\frac{\|u_n - (u_n)_{h_n}\|_{1,2,\Omega}}{h_n^{\nu-1} \|u_n\|_{\nu,2,\Omega}} \geq c > 0 \quad (1.14)$$

für eine Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$ erfüllt. Die Abschätzung (1.4) ist in diesem Sinne **asymptotisch scharf**. Die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann aber wegen (1.12) nicht zu einer Funktion kondensiert werden, da sonst die Schärfe im Sinne eines Gegenbeispiels folgen würde.

Bei den Abschätzungen gegen die Stetigkeitsmoduln ist dies anders. Zur Angabe von Gegenbeispielen werden dabei die quantitativen Erweiterungen des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit von Dickmeis, Nessel und van Wickeren herangezogen. Diese ermöglichen es, aus einer über sogenannte Resonanzelemente geeignet formulierten asymptotischen Schärfe unter Zusatzbedingungen tatsächlich ein Gegenbeispiel zu kondensieren. Die bei der Anwendung dieser Prinzipien erforderlichen Abschätzungen des Fehlers nach unten gestalten sich bei den Schranken (1.6) und (1.7) relativ übersichtlich, da hier gegen geeignete Fehler der besten Approximation abgeschätzt werden kann und dann die auch bei den direkten Sätzen benutzte Technik des Referenzelements anwendbar ist. So existiert z.B. zu jedem abstrakten Stetigkeitsmodul ω (d.h. $\omega \in C[0, \infty)$ mit $0 = \omega(0) < \omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$, $\delta_1, \delta_2 > 0$; z.B. $\omega(\delta) = \delta^\nu$, $0 < \nu \leq 1$) ein Gegenbeispiel $u_\omega \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ mit $(\delta \rightarrow 0+, h \rightarrow 0+)$

$$\begin{aligned} \omega_{r-1}^{(2)}(\delta, u_\omega, L^2(\Omega)) &= \mathcal{O}(\omega(\delta^{r-1})) \\ h^{-2} \|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{L^2(\Omega)} &\neq o(\omega(h^{r-1})), \end{aligned}$$

so daß sich die Ordnung der Schranke (1.7) nicht verbessern läßt (siehe Satz 4.15 bzw. (4.66)). Damit ist die Schärfe im Sinne von Gegenbeispielen etabliert, wobei die Ordnungsfunktion $\varphi(\delta) = \omega(\delta^{r-1})$ gewählt wird. Der Beweis dieser Aussage erfordert keine zusätzlichen Bedingungen an die Triangulierungen und kann sogar auf Ansatzfunktionsräume zu nicht affin-äquivalenten Finiten Elementen übertragen werden. Für die Fehlerschranke (1.8) in den negativen Normen läßt sich unter der zusätzlichen Voraussetzung der Symmetrie der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ die Schärfe über Gegenbeispiele zeigen, indem bei der Abschätzung nach unten der sogenannte „pollution“-Effekt (vgl. [9, S.141], siehe (4.73)) ausgenutzt wird.

Die Finite-Elemente-Theorie basiert auf Hilbert-Raum-Eigenschaften, so daß sich zunächst Fehlerschranken in Integralnormen anbieten. Man ist aber auch am punktwweisen Verhalten des Fehlers interessiert, und hier gibt es interessante Effekte. Sei $C^s(\overline{\Omega})$ der mit $\|u\|_{s,\overline{\Omega}} := \sum_{|\alpha|\leq s} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega})}$, $\|u\|_{C(\overline{\Omega})} := \sup_{x\in\Omega} |u(x)|$, normierte Raum der auf $\overline{\Omega}$ stetigen Funktionen u , für die alle partiellen Ableitungen bis zur Ordnung s gleichmäßig stetig und beschränkt auf Ω sind. Außerdem seien $C(\overline{\Omega}) := C^0(\overline{\Omega})$ und $C_0(\overline{\Omega}) := \{u \in C(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}$. Um Fehlerschranken in der Supremum-Norm anzugeben, betrachten wir die einfache Bilinearform

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx,$$

die sich aus dem Laplace-Operator $\Delta = D^{(2,0)} + D^{(0,2)}$ ergibt, und formulieren das schwache diskrete Problem (1.2) wie folgt um (vgl. [76]): *Zu $u \in C_0(\overline{\Omega})$ ist eine Funktion $u_h \in V_h$ gesucht mit (vgl. (3.89))*

$$a(u_h, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[- \int_K u(x) \Delta v(x) dx + \int_{\partial K} u(x) \nabla v(x) \nu(x) d\sigma(x) \right] \quad \forall v \in V_h. \quad (1.15)$$

Dabei sei $\nu(x)$ die äußere Normale, und $\int_{\partial K} d\sigma(x)$ bezeichne das Kurvenintegral über ∂K . Die Umformulierung gestattet es, zu jedem stetigen $u \in C_0(\overline{\Omega})$ eine Lösung u_h zu berechnen – es muß nicht $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gelten (vgl. (1.1)). Ist dies aber zusätzlich erfüllt, so geht die rechte Seite von (1.15) vermöge partieller Integration über in $a(u, v)$.

Für den Fehler $u - u_h$ zur Aufgabe (1.15) gilt, falls der Grad des Ansatzfunktionenraums $r > 1$ ist:

$$\|u - u_h\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C \omega_{r+1}(h, u, C(\overline{\Omega})). \quad (1.16)$$

Dabei ist der Supremum-Norm-Stetigkeitsmodul analog zum Modul in der L^2 -Norm festgelegt:

$$\omega_r^{(s)}(\delta, u, C(\overline{\Omega})) := \sum_{|\alpha|=s} \omega_r(\delta, D^\alpha u, C(\overline{\Omega})) := \sum_{|\alpha|=s} \sup_{|\nu|\leq\delta} \|\Delta_\nu^r D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega}(r\nu))}.$$

Ist der Grad r jedoch 1, so kommt ein log-Faktor hinzu (vgl. [76]):

$$\|u - u_h\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C |\log h| \omega_2(h, u, C(\overline{\Omega})). \quad (1.17)$$

Während sich die Schranke (1.16) bei Schärfeuntersuchungen in etwa wie der L^2 -Fehler (1.7) verhält, fällt der Fall stückweise linearer Ansatzfunktionen, also $r = 1$, völlig aus dem Rahmen. Für den log-Faktor kann bei der direkten Abschätzung die Singularität der Green-Funktion verantwortlich gemacht werden (siehe [82]). Dagegen werden bei Schärfeuntersuchungen die Eigenschaften der diskreten Green-Funktion eines verwandten Differenzenverfahrens herangezogen. So beweist Haverkamp in [52] eine asymptotische Schärfe der Fehlerschranke. In [67, S.185ff] (vgl. auch [43]) wird darauf aufbauend gezeigt, daß bei Verwendung einer einfachen Familie von Triangulierungen

zu jedem abstrakten Stetigkeitsmodul ω mit $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$ ein Gegenbeispiel $u_\omega \in C_0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega})$ existiert mit $(\delta \rightarrow 0+, h \rightarrow 0+)$

$$\begin{aligned}\omega_1^{(1)}(\delta, u_\omega, C(\overline{\Omega})) &= \mathcal{O}(\omega(\delta)) \\ \|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{C(\overline{\Omega})} &\neq o(h|\log h|\omega(h)).\end{aligned}$$

Da für Funktionen aus $C^1(\overline{\Omega})$ die Abschätzung $\omega_2(\delta, u, C(\overline{\Omega})) \leq C\delta\omega_1^{(1)}(\delta, u, C(\overline{\Omega}))$ gilt, ist dies ein Beitrag zur Güte der Schranke (1.17). Allerdings folgt so nicht direkt, daß es auch einen Punkt $x \in \Omega$ gibt mit $(h \rightarrow 0+)$

$$|u_\omega(x) - (u_\omega)_h(x)| \neq o(h|\log h|\omega(h)). \quad (1.18)$$

Hier wird nun bewiesen, daß zu jedem abstrakten Stetigkeitsmodul ω , der die Bedingung $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$ erfüllt, ein Gegenbeispiel u_ω existiert, so daß (1.18) sogar für jeden Punkt x einer in Ω dichten Teilmenge gilt. Der Beweis dieser Aussage basiert ebenfalls auf Eigenschaften der diskreten Green-Funktion. Insbesondere wird benutzt, daß sie nicht-positiv ist. Der Fehler verhält sich also in sehr vielen Punkten schlechtest möglich.

Im Vergleich zu Differenzenverfahren erkennt man andererseits, daß für relativ glatte Lösungen die Konvergenzordnung in gewissen Punkten durchaus größer ist, als dies z.B. durch die globale Abschätzung (1.17) angezeigt wird (vgl. [62]). Solche Effekte werden unter der Bezeichnung Superkonvergenz zusammengefaßt. Es erscheint besonders reizvoll, Schärfeuntersuchungen bei Superkonvergenz-Fehlerschranken durchzuführen, da es hier gilt, einen sehr kleinen Fehler nach unten abzuschätzen. Dabei ist zu erwarten, daß alle wichtigen Parameter der Differentialgleichung und ihrer Diskretisierung berücksichtigt werden müssen. Als eindimensionale Beispielsituation untersuchen wir in Kapitel 5 eine Sturm-Liouville-Randwertaufgabe (vgl. [36], [45, S.43ff], [64], [94, S.3]). Auf $W_0^{1,2}(0,1)$ sei eine koerzive, beschränkte Bilinearform

$$a(u, v) := \int_0^1 [a(x)u'(x)v'(x) + b(x)u(x)v(x)]dx$$

mit hinreichend glatten Koeffizientenfunktionen $a(x)$ und $b(x)$ gegeben. Betrachtet man dafür die Aufgaben (1.1) und (1.2), wobei die Ansatzfunktionen zu einer äquidistanten Zerlegung des Intervalls $(0,1)$ gebildet sind, so lassen sich die folgenden globalen Fehlerschranken zeigen:

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_{L^2(0,1)} &\leq Ch^2\omega_{r-1}^{(2)}(h, u, L^2(0,1)) \quad (r \geq 2) \\ \|u - u_h\|_{C[0,1]} &\leq C[h\omega_r^{(1)}(h, u, C[0,1]) + h^{r+1}\|u\|_{C[0,1]}] \\ \|u - u_h\|_{1,\infty,(0,1)} &\leq C[\omega_r^{(1)}(h, u, C[0,1]) + h^r\|u\|_{C[0,1]}].\end{aligned}$$

Ist dagegen x ein Zerlegungspunkt, so gilt sogar $(r \geq 2)$:

$$|u(x) - u_h(x)| \leq Ch^{r+1}\omega_{r-1}^{(2)}(h, u, L^2(0,1)). \quad (1.19)$$

Im Inneren jedes Zerlegungsintervalls gibt es darüber hinaus $r - 1$ Stellen, nämlich die sogenannten Lobatto-Punkte, für die gilt:

$$|u(x) - u_h(x)| \leq C[h\omega_{r+1}^{(1)}(h, u, C[0, 1]) + h^{r+2}\|u\|_{C[0,1]}]. \quad (1.20)$$

Außerdem verhält sich auch die Ableitung des Fehlers an den r Gauß-Punkten im Inneren jedes Zerlegungsintervalls günstiger:

$$|u'(x) - u'_h(x)| \leq C[\omega_{r+1}^{(1)}(h, u, C[0, 1]) + h^{r+1}\|u\|_{C[0,1]}]. \quad (1.21)$$

Unter Ausnutzung der Stabilität der Finite-Elemente-Methode folgt die Schärfe der Schranke (1.19) mit einem quantitativen Resonanzprinzip. Dabei wird eine Fehlerdarstellung von Douglas und Dupont aufgegriffen, mit der in [36] ein Gegenbeispiel zum abstrakten Stetigkeitsmodul $\omega(\delta) = \delta$ explizit konstruiert wird. Zum Nachweis der Schärfe der Schranken (1.20) und (1.21) wird der Fehler nach Legendre-Polynomen entwickelt und dann ausgenutzt, daß die Nullstellen aufeinanderfolgender Orthogonalpolynome verschieden sind. So kann auch hier zu jedem abstrakten Stetigkeitsmodul mit $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$ ein Gegenbeispiel kondensiert werden.

Alle beschriebenen Fehlerschranken betreffen Randwertprobleme. Aber auch in Verbindung mit parabolischen Anfangs-Randwertaufgaben werden Finite-Elemente-Verfahren eingesetzt. Hier würden genaue Betrachtungen den Rahmen dieser Arbeit sprengen, so daß im Anhang B nur einige Aspekte im Zusammenhang mit der bei Differenzenverfahren entwickelten Theorie zur Schärfeuntersuchung (vgl. [42, 44]) dargestellt werden.

Um die notwendige Terminologie bereitzustellen, werden in Kapitel 2.1.3 Sobolev-Räume eingeführt, und Kapitel 3 beginnt mit einer ausführlichen Einführung in die Finite-Elemente-Methode.

Kapitel 2

Grundlagen

Neben einer kurzen Darstellung der benötigten Funktionenräume soll dieses Kapitel zum einen die verwendeten Hilfsmittel und Ideen aus der Approximationstheorie darstellen und zum anderen die funktionalanalytischen Grundlagen der Finite-Elemente-Methode zusammenfassen.

2.1 Funktionenräume

Der Fehler bei der Finite-Elemente-Approximation wird in Kapitel 3 in einer Reihe verschiedener Normen gemessen. Dazu geben wir zunächst die Definitionen der benötigten Funktionenräume wieder.

2.1.1 Stetige und differenzierbare Funktionen

Für eine kurze Notation partieller Ableitungen verwenden wir die übliche Multiindex-Schreibweise. Dabei heißt $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$ ein Multiindex, die Ordnung von α ist $|\alpha| := \sum_{j=1}^m \alpha_j$. Für $x \in \mathbb{R}^m$ sei $x^\alpha := \prod_{j=1}^m x_j^{\alpha_j}$, und wir benutzen die Bezeichnungen $\binom{\alpha}{\beta} := \prod_{j=1}^m \binom{\alpha_j}{\beta_j}$ sowie $\alpha \leq \beta$, falls $\alpha_j \leq \beta_j$, $1 \leq j \leq m$, und $\alpha < \beta$, falls $\alpha \leq \beta$ und $\alpha_j < \beta_j$ für mindestens ein $1 \leq j \leq m$. Daneben werden die Einheitsvektoren $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{N}_0^m$ benötigt, deren j -te Komponente 1 ist. Für die partielle Ableitung einer Funktion f im Punkt x zum Multiindex α schreiben wir

$$D^\alpha f(x) = f^{(\alpha)}(x) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} f(x).$$

Seien jetzt $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine offene, aber nicht notwendig beschränkte Menge und $s \in \mathbb{N}_0$. Ohne weiter darauf hinzuweisen, verlangen wir im folgenden stets $\Omega \neq \emptyset$. Wir verwenden die Bezeichnungen

$$C^s(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : D^\alpha f \text{ existiert für jedes } |\alpha| \leq s \text{ und ist stetig auf } \Omega\},$$

$$\begin{aligned}
C(\Omega) &:= C^0(\Omega), \\
C^\infty(\Omega) &:= \bigcap_{j=0}^{\infty} C^j(\Omega), \\
C^s(\overline{\Omega}) &:= \{f : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist stetig auf } \overline{\Omega}, f \in C^s(\Omega) \text{ und} \\
&\quad D^\alpha f \text{ ist für jedes } |\alpha| \leq s \text{ beschränkt und gleichmäßig stetig auf } \Omega\}, \\
C(\overline{\Omega}) &:= C^0(\overline{\Omega}), \\
C_0(\overline{\Omega}) &:= \{f \in C(\overline{\Omega}) : f(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega\}, \\
C_{00}^s(\Omega) &:= \{f \in C^s(\Omega) : \text{Tr } f \subset \Omega, \text{Tr } f \text{ ist kompakt}\}, \\
C_{00}^\infty(\Omega) &:= \bigcap_{j=0}^{\infty} C_{00}^j(\Omega), \\
\|f\|_{C(\overline{\Omega})} &:= \sup\{|f(x)| : x \in \overline{\Omega}\} = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}, f \in C(\overline{\Omega}), \\
\|f\|_{s,\overline{\Omega}} &:= \sum_{|\alpha| \leq s} |f|_{\alpha,\overline{\Omega}}, f \in C^s(\overline{\Omega}), \text{ wobei} \\
|f|_{\alpha,\overline{\Omega}} &:= \|D^\alpha f\|_{C(\overline{\Omega})}, \\
|f|_{s,\overline{\Omega}} &:= \sum_{|\alpha|=s} |f|_{\alpha,\overline{\Omega}}.
\end{aligned}$$

Man beachte bei der Definition von $C^s(\overline{\Omega})$, daß eine auf Ω gleichmäßig stetige Funktion f eine eindeutige stetige Fortsetzung auf die Abschließung $\overline{\Omega}$ besitzt (vgl. [1, S.9]). Damit wird das Problem umgangen, daß die Ableitungen zunächst nur auf der offenen Menge Ω definiert sind. Die Räume bezüglich $\overline{\Omega}$ sind so gewählt, daß sie unter der entsprechenden Norm zu einem linearen, normierten Raum werden, insbesondere sind $(C^s(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{s,\overline{\Omega}})$ und $(C_0(\overline{\Omega}) \cap C^s(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{s,\overline{\Omega}})$ Banach-Räume. Häufig benötigt man mehr als Stetigkeit, aber weniger als Differenzierbarkeit:

Definition 2.1 (siehe [2, S.24]) Eine Funktion $f \in C(\Omega)$ heißt **Hölder-stetig** auf Ω zum Parameter $0 < \nu \in \mathbb{R}$, falls eine Konstante $C = C_f$ existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\nu \quad \forall x, y \in \Omega.$$

Ist $\nu = 1$, so heißt f **Lipschitz-stetig** auf Ω .

Wir verwenden die Definition entsprechend für Funktionen aus $C(\overline{\Omega})$.

Polynome sind ein wichtiger Spezialfall stetiger Funktionen. In mehreren Dimensionen gibt es verschiedene Möglichkeiten, den Polynomgrad zu definieren. Im wesentlichen benutzen wir die beiden folgenden Definitionen ($r \in \mathbb{N}_0$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_r &:= \{f \in C(\mathbb{R}^m) : f(x) = \sum_{|\alpha| \leq r} C_\alpha x^\alpha, C_\alpha \in \mathbb{R}\}, \\
\mathcal{P}^r &:= \{f \in C(\mathbb{R}^m) : f(x) = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^m \\ \alpha_j \leq r, 1 \leq j \leq m}} C_\alpha x^\alpha, C_\alpha \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Bei \mathcal{P}_r wird der Grad also über die Ordnung der Multiindizes angegeben, während \mathcal{P}^r gerade die Menge der Funktionen beschreibt, die in jeder Variablen Polynome vom Grad r sind. Es gilt also

$$\mathcal{P}_r \subset \mathcal{P}^r \subset \mathcal{P}_{mr}.$$

Später führen wir in (2.14) noch weitere Polynomräume ein.

2.1.2 Geometrische Eigenschaften

Natürlich hat die geometrische Struktur einer Definitionsmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ einen großen Einfluß für die auf Ω definierten Funktionenräume. Daher fahren wir mit einigen Definitionen zur Klassifizierung offener Mengen fort.

Definition 2.2 (vgl. [1, S.65], siehe [59, S.122]) Eine Menge

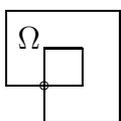
$$\text{cone}(\eta, \gamma, \rho) := \left\{ 0 \neq x \in \mathbb{R}^m : \frac{x \cdot \eta}{|x|} > \cos \gamma, |x| < \rho \right\},$$

wobei $\eta \in \mathbb{R}^m$ mit $|\eta| = 1$, $\rho, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\rho > 0$ und $\cos \gamma > 0$, heißt ein **Kegel** mit Scheitel 0 . Dabei bezeichnet $x \cdot \eta$ das übliche Skalarprodukt der Vektoren x und η im \mathbb{R}^m . Entsprechend nennen wir für $x \in \mathbb{R}^m$ die Menge $x + \text{cone}(\eta, \gamma, \rho)$ einen Kegel mit Scheitel x .

Definition 2.3

- a) (vgl. [1, S.66]) Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ erfüllt die **Kegelbedingung**, falls ein Kegel K existiert, so daß jeder Punkt $x \in \Omega$ Scheitel eines zu K kongruenten Kegels ist, der ganz in Ω liegt.
- b) (vgl. [2, S.182]) Eine beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ hat einen **Lipschitz-Rand**, falls zu jedem $x \in \partial\Omega$ eine offene Umgebung $U(x)$ existiert, so daß $\partial\Omega \cap U(x)$ Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion ist und $\Omega \cap U(x)$ nur auf einer Seite dieses Graphen liegt.

Für die Definition eines Lipschitz-Randes für unbeschränkte Mengen verweisen wir z.B. auf [9, S.31]. Aus der Kegelbedingung folgt i.a. nicht, daß Ω einen Lipschitz-Rand besitzt. Hat aber umgekehrt eine beschränkte, offene Menge Ω einen Lipschitz-Rand, so ist die Kegelbedingung erfüllt (vgl. [1, S.67]). Ist z.B. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, konvexes Gebiet, dann läßt sich $\partial\Omega$ stückweise durch konkave Funktionen parametrisieren, so daß ein Lipschitz-Rand vorliegt (vgl. [95, I, S.303]). Dabei heißt eine Menge Gebiet, falls sie offen und zusammenhängend ist.



Das links abgebildete Gebiet Ω erfüllt zwar die Kegelbedingung, hat aber keinen Lipschitz-Rand, da zur markierten Stelle keine Umgebung existiert, so daß in ihr $\partial\Omega$ Graph einer Funktion ist.

Im Umgang mit den Stetigkeitsmoduln, die wir später als Glattheitsmaße benutzen, erweist sich eine weitere, zunächst technisch anmutende Bedingung als nützlich:

Definition 2.4 (siehe [59]) Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ heißt **Lipschitz-Graph-Gebiet** (**LG-Gebiet** bzw. **hat minimal glatte Ränder**), falls eine endliche Familie offener Mengen $\{Q_j : 1 \leq j \leq n\}$ und eine zugehörige Familie von Kegeln $\text{cone}(\eta_j, \gamma_j, \rho_j)$ sowie ein $\kappa > 0$ existieren, so daß $(S(\kappa, x) := \{y \in \mathbb{R}^m : |x - y| < \kappa\})$

- a) $\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^n \{x \in Q_j : S(\kappa, x) \subset Q_j\}$;
- b) $(Q_j \cap \Omega) + \text{cone}(\eta_j, \gamma_j, \rho_j) \subset \Omega, 1 \leq j \leq n$.

Trotz der Bezeichnung als Gebiet verlangen wir nicht, daß ein LG-Gebiet zusammenhängend ist.

In [86] werden äquivalente Formulierungen der LG-Bedingung untersucht. Insbesondere entspricht sie der strengen lokalen Lipschitz-Bedingung aus [1, S.66], die für beschränktes Ω damit äquivalent ist, daß Ω einen Lipschitz-Rand besitzt (siehe [1, S.67]):

$$\text{Kegelbedingung} \begin{array}{c} \not\Rightarrow \\ \Leftarrow \end{array} \text{Lipschitz-Rand} \xrightarrow{\Omega \text{ beschränkt}} \text{LG-Gebiet}.$$

Für den späteren Umgang mit Λ -Moduln formulieren wir noch eine weitere Bedingung, die aber nur rein technische Bedeutung hat:

Definition 2.5 Ein LG-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ hat die **Rechteck-Eigenschaft**, falls $\bar{\Omega}$ als endliche Vereinigung von Rechtecken (vgl. Definition 3.6) $K = \prod_{j=1}^m [a_j, b_j]$ darstellbar und koordinatenweise konvex ist, d.h., mit $x, x + te_j \in \Omega$ ist auch $x + \zeta e_j \in \Omega, 0 \leq \zeta \leq t, 1 \leq j \leq m$.

2.1.3 Sobolev-Räume

Die Finite-Elemente-Methode ist im wesentlichen Hilbert-Raum-Theorie, wobei der Hilbert-Raum, durch die Aufgabenstellung bedingt, ein Sobolev-Raum ist. Sobolev-Räume sind Verallgemeinerungen der Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$, um Ableitungen zu berücksichtigen. Für meßbares $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ist dabei $L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} : f \text{ ist meßbar und } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$ mit der Norm $\|f\|_{L^p(\Omega)} := [\int_{\Omega} |f(x)|^p dx]^{1/p}$ für $1 \leq p < \infty$. Ist $p = \infty$, so wird mit $\|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)}$ das wesentliche Supremum auf Ω bezeichnet. $L^2(\Omega)$ ist ein Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $(f, g)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$. Im folgenden sei wieder $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) offen. Die Sobolev-Räume basieren auf dem Begriff der schwachen Ableitung. Dazu sei $L^1_{loc}(\Omega)$ die Menge der meßbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt: $f \in L^1(K)$ für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$.

Definition 2.6 Seien $f \in L^1_{loc}(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}_0^m$. Falls es ein $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ gibt mit

$$\int_{\Omega} g(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x)\varphi^{(\alpha)}(x)dx \quad \forall \varphi \in C^\infty_{00}(\Omega),$$

so heißt g die **schwache (distributionentheoretische) Ableitung** der Ordnung α von f . Wir führen keine neue Bezeichnung ein, sondern schreiben auch hier: $g = D^\alpha f = f^{(\alpha)}$.

Die Notation ist sinnvoll: Ist $f \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, so stimmt g mit der klassischen α -ten partiellen Ableitung von f überein (vgl. [1, S.20]), d.h., die Begriffe sind verträglich. Durch f wird eine Distribution (stetiges Funktional) über $C_{00}^\infty(\Omega)$ erzeugt. Die α -te distributionentheoretische Ableitung dieser Distribution wird dann (regulär) von g erzeugt.

Definition 2.7 Seien $s \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$. Die Räume

$$\begin{aligned} W^{s,p}(\Omega) &:= \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ existiert für jedes } |\alpha| \leq s \\ &\quad \text{im Sinne von Definition 2.6}\}, \\ W_0^{s,p}(\Omega) &:= \overline{C_{00}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{s,p,\Omega}} \text{ (Abschließung von } C_{00}^\infty(\Omega) \text{ in } W^{s,p}(\Omega)), \end{aligned}$$

versehen mit der über die Halbnormen ($0 \leq j \leq s$)

$$|f|_{j,p,\Omega} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{für } p = \infty \end{cases}$$

definierten Norm

$$\|f\|_{s,p,\Omega} := \begin{cases} \left(\sum_{0 \leq j \leq s} |f|_{j,p,\Omega}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \leq p < \infty \\ \sum_{0 \leq j \leq s} |f|_{j,\infty,\Omega} & \text{für } p = \infty, \end{cases} \quad (2.2)$$

heißen **Sobolev-Räume**. Weiter benutzen wir die Schreibweise ($\alpha \in \mathbb{N}_0^m$)

$$|f|_{\alpha,p,\Omega} := \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}.$$

Es sind durchaus auch geringfügig andere Definitionen der Sobolev-(Halb-)Normen üblich, die aber mit der hier benutzten äquivalent sind. So existiert z.B. ein $c > 0$, so daß für $1 \leq p < \infty$ gilt:

$$c \sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leq |f|_{j,p,\Omega} \leq \sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}. \quad (2.3)$$

Da der Vektor $(\|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)})_{|\alpha|=j}$ Element eines endlich-dimensionalen Raums ist und auf diesem alle Normen äquivalent sind, folgt die erste Ungleichung. Die zweite folgt aus der Jensen-Ungleichung.

Zur Abgrenzung der Sobolev- ∞ -Normen $\|\cdot\|_{s,\infty,\Omega}$ gegen die $C^s(\overline{\Omega})$ -Normen haben wir letztgenannte ohne den Index ∞ als $\|\cdot\|_{s,\overline{\Omega}}$ eingeführt. Wir werden zur Abkürzung auch Sobolev-Räume über nicht-offene Mengen notieren, verstehen darunter aber den Sobolev-Raum über das Innere der Menge. Aus den Definitionen 2.6 und 2.7 folgt sofort, daß zu $f \in W^{s,p}(\Omega)$ und $|\alpha| \leq s$ die Funktion $D^\alpha f$ zu $W^{s-|\alpha|,p}(\Omega)$ gehört.

Lemma 2.8 (siehe [1, S.45,47,54,52,159]) Seien $s \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p \leq \infty$.

a) Die Räume $W^{s,p}(\Omega)$ sind Banach-Räume. Insbesondere gilt dies auch für $W_0^{s,p}(\Omega)$ als abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit und für die Räume $W_0^{s,p}(\Omega) \cap W^{j,p}(\Omega)$, $j > s$.

b) Die Räume $W^{s,2}(\Omega)$ und $W_0^{s,2}(\Omega)$ sind Hilbert-Räume mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{s,2,\Omega} := \sum_{|\alpha| \leq s} (D^\alpha f, D^\alpha g)_{L^2(\Omega)},$$

die damit stetig im Hilbert-Raum $L^2(\Omega)$ eingebettet sind.

c) (Satz von Meyers und Serrin) Für $1 \leq p < \infty$ ist

$$W^{s,p}(\Omega) = \overline{\{f \in C^s(\Omega) : \|f\|_{s,p,\Omega} < \infty\}}^{\|\cdot\|_{s,p,\Omega}}, \quad (2.4)$$

d.h., die s -mal stetig differenzierbaren Funktionen liegen dicht in $W^{s,p}(\Omega)$. Ist darüber hinaus Ω ein LG-Gebiet, so ist $\{f|_\Omega : f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)\}$ dicht in $W^{s,p}(\Omega)$.

d) (Poincaré-Ungleichung) Sei Ω beschränkt und $p < \infty$. Dann existiert eine Konstante C , so daß

$$|f|_{s,p,\Omega} \leq \|f\|_{s,p,\Omega} \leq C|f|_{s,p,\Omega} \quad \forall f \in W_0^{s,p}(\Omega).$$

Mit der wichtigen Aussage (2.4) und der Verträglichkeit der Ableitungsbegriffe folgt z.B. unmittelbar aus den Rechenregeln für klassische Ableitungen, daß für $f \in C^s(\overline{\Omega})$ und $g \in W^{s,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, auch das Produkt fg in $W^{s,p}(\Omega)$ enthalten ist mit ($|\alpha| < s$)

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^{\alpha-\beta} g.$$

Darüber hinaus läßt sich unter geeigneten Voraussetzungen an Ω und s sogar zeigen, daß $W^{s,p}(\Omega)$ eine kommutative Banach-Algebra ist (siehe [1, S.115]). Beim Beweis einiger Fehlerschranken wird Lagrange-Interpolation benutzt. Dazu müssen die Funktionen punktweise erklärt sein. Unter anderem dafür wird der folgende wichtige Satz eingesetzt:

Satz 2.9 (Sobolev-Einbettungssatz, siehe z.B. [1, S.97ff]) Seien Ω ein LG-Gebiet (Definition 2.4), $1 \leq p < \infty$ und $s \in \mathbb{N}$, so daß $sp > m$. Dann ist

$$W^{s,p}(\Omega) \subset_{st} C(\overline{\Omega}).$$

Falls $sp > m$, stimmt also jede Funktion f aus $W^{s,p}(\Omega)$ fast überall mit einer auf $\overline{\Omega}$ stetigen Funktion überein. Wir werden in diesem Fall zur Vereinfachung der Notation f mit der stetigen Funktion identifizieren. Unter den obigen Voraussetzungen folgt sogar

eine Hölder-Stetigkeit von $f \in W^{s,p}(\Omega)$ (vgl. Definition 2.1). Wir werden aber diese zusätzliche Regularität nicht benötigen.

Zum Beweis späterer direkter Fehlerabschätzungen (Bramble-Hilbert-Lemma) erweist sich der folgende Einbettungssatz als sehr nützlich.

Satz 2.10 (*Rellich-Kondrachov-Einbettungssatz, siehe [1, S.144]*) Die beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ erfülle die Kegelbedingung. Dann ist die Einbettung ($1 \leq p < \infty$, $s \in \mathbb{N}_0$)

$$W^{s+1,p}(\Omega) \subset W^{s,p}(\Omega)$$

kompakt, d.h., jede bezüglich $W^{s+1,p}(\Omega)$ beschränkte Folge besitzt eine bezüglich $W^{s,p}(\Omega)$ konvergente Teilfolge.

Die Formulierung des Satzes ist etwas anders als in [1, S.144]. Um die Aussagen zu identifizieren, wähle man dort konkret $\Omega_0 := \Omega$, $m = 1$, $k = n$ und $q = p$. Damit folgt Satz 2.10 aus den dortigen Ergebnissen (3), (4) und (6).

Wir möchten Differentialgleichungen untersuchen, die als Randwertaufgaben gestellt sind. Dazu müssen wir aber über die Funktionswerte auf $\partial\Omega$ verfügen. Dies erscheint zunächst schwierig, da dabei $\partial\Omega$ das Lebesgue-Maß 0 hat. Besitzt die beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ einen Lipschitz-Rand, so gibt es aber für $1 \leq p \leq \infty$ einen eindeutigen linearen, beschränkten Spur-Operator $B_p : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega)$, der die Bedingung

$$B_p f = f|_{\partial\Omega} \text{ für } f \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

erfüllt (siehe [2, S.190]). Wir verzichten auf eine genaue Definition der Räume $L^p(\partial\Omega)$ und verweisen auf [2, S.187]. Wichtig ist, daß dabei $\partial\Omega$ als eine Teilmenge des \mathbb{R}^{m-1} aufgefaßt wird (mit einer geeigneten Interpretation für $m = 1$, vgl. (2.8)). Der Spur-Operator ermöglicht eine Charakterisierung der Räume $W_0^{1,p}(\Omega)$:

Lemma 2.11 (*siehe [2, S.196]*) Die beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ habe einen Lipschitz-Rand (Definition 2.3b). Dann gilt für $1 \leq p < \infty$:

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{f \in W^{1,p}(\Omega) : B_p f = 0\}. \quad (2.5)$$

Ist Ω beschränkt, so ist $C^1(\overline{\Omega}) \subset W^{1,p}(\Omega)$. Hat darüber hinaus Ω einen Lipschitz-Rand, so folgt mit dem Lemma: $C_0^1(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega}) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$. Mit dem Spur-Operator läßt sich auch der Satz von Gauß für Sobolev-Räume formulieren:

Satz 2.12 (*Satz von Gauß, siehe z.B. [2, S.193]*) Die beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ habe einen Lipschitz-Rand, und seien $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $g \in W^{1,q}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$. Im Fall $p = \infty$ oder $q = \infty$ sei jedoch $W^{1,\infty}(\Omega)$ durch $C^1(\overline{\Omega})$ ersetzt. Dann gilt für $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ mit $|\alpha| = 1$:

$$\int_{\Omega} f(x) D^{\alpha} g(x) dx = - \int_{\Omega} g(x) D^{\alpha} f(x) dx + \int_{\partial\Omega} B_p f(x) B_q g(x) (\alpha \cdot \nu(x)) d\sigma(x), \quad (2.6)$$

wobei $\nu(x)$ die äußere Normale von $\partial\Omega$ und $\int_{\partial\Omega} d\sigma(x)$ das Randintegral bezeichnet (vgl. [2, S.188]). Ist $f \in W_0^{1,p}(\Omega)$ oder $g \in W_0^{1,q}(\Omega)$, so gilt

$$\int_{\Omega} f(x) D^\alpha g(x) dx = - \int_{\Omega} g(x) D^\alpha f(x) dx. \quad (2.7)$$

Alle bislang gesammelten Ergebnisse sind natürlich auch im Spezialfall $m = 1$ gültig, insbesondere beschreibt der Satz von Gauß dann eine partielle Integration. Hier gibt es aber zusätzlich eine handliche Darstellung der Sobolev-Räume als Mengen absolut stetiger Funktionen: Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p \leq \infty$, dann ist (vgl. [27, S.37])

$$\begin{aligned} W^{s,p}(a, b) &= \{f \in L^p(a, b) : f = g \text{ f.ü. und} \\ &\quad g(x) = C_1 + \int_a^x C_2 + \int_a^{t_1} \dots C_s + \int_a^{t_{s-1}} w(t_s) dt_s \dots dt_1 \quad (2.8) \\ &\quad \text{für ein } w \in L^p(a, b) \text{ und Konstanten } C_1, \dots, C_s \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Damit läßt sich jede Funktion $f \in W^{s,p}(a, b)$ als Element von $C^{s-1}[a, b]$ auffassen (vgl. Satz 2.9), wobei $f^{(s-1)}$ punktweise f.ü. differenzierbar ist.

Bisher haben wir nur die klassischen Sobolev-Räume $W^{s,p}(\Omega)$ mit ganzzahliger Ordnung s betrachtet. Wir benötigen die Räume aber auch für nicht-ganzzahlige und negative Ordnungen.

Definition 2.13 (siehe [9, S.277]) Seien $s \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p < \infty$ und $0 < \Theta < 1$. Die beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ habe einen Lipschitz-Rand. Dann setzen wir

$$\begin{aligned} W^{s+\Theta,p}(\Omega) &:= \{f \in W^{s,p}(\Omega) : \|f\|_{s+\Theta,p,\Omega} < \infty\}, \\ \|f\|_{s+\Theta,p,\Omega}^p &:= \|f\|_{s,p,\Omega}^p + \sum_{|\alpha|=s} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|f^{(\alpha)}(x) - f^{(\alpha)}(y)|}{|x - y|^{m+\Theta p}} dx dy. \quad (2.9) \end{aligned}$$

Die Werte $\Theta \in \{0, 1\}$ sind hier ausgeschlossen. In diesen Fällen beziehen wir uns auf die Definition 2.7. Die **fraktionierten Sobolev-Räume** $W^{s+\Theta,p}(\Omega)$ sind ebenfalls Banach-Räume. Diese und weitere Eigenschaften folgen z.B. aus ihrer Charakterisierung als Interpolationsräume, die wir in Kapitel 2.3, Satz 2.27, aufgreifen.

Sobolev-Räume zu negativen Ordnungen sind die Dualräume der Sobolev-Räume positiver Ordnungen (siehe [9, S.39], vgl. [1, S.47ff]): Zu $\nu > 0$, $\nu \in \mathbb{R}$, sei $(1/p + 1/q = 1)$

$$W^{-\nu,p}(\Omega) := (W^{\nu,q}(\Omega))^*.$$

Uns interessiert nur der Fall $p = 2$: $L^2(\Omega)$ ist stetig in $W^{-\nu,2}(\Omega)$ eingebettet vermöge der Abbildung $f \in L^2(\Omega) \rightarrow (f, \cdot)_{L^2(\Omega)} \in W^{-\nu,2}(\Omega)$, denn

$$\begin{aligned} \|f\|_{-\nu,2,\Omega} &:= \|(f, \cdot)_{L^2(\Omega)}\|_{-\nu,2,\Omega} := \sup_{0 \neq g \in W^{\nu,2}(\Omega)} \frac{(f, g)_{L^2(\Omega)}}{\|g\|_{\nu,2,\Omega}} \quad (2.10) \\ &\leq \sup_{0 \neq g \in W^{\nu,2}(\Omega)} \frac{\|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}}{\|g\|_{\nu,2,\Omega}} \stackrel{(2.2),(2.9)}{\leq} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Wir haben damit auf $L^2(\Omega)$ die **negative Norm** $\|\cdot\|_{-\nu,2,\Omega}$ zur Verfügung.

2.2 Stetigkeitsmodul und K-Funktionale

Für die in Kapitel 3 angestrebten Fehlerabschätzungen werden Glattheitsmaße benötigt, die die Regularität der Lösung geeignet wiedergeben. Dies sind die aus der Approximationstheorie bekannten Stetigkeitsmoduln und K-Funktionale. Im Hinblick auf die spätere Verwendung geben wir insbesondere Versionen dieser Strukturfunktionale für Funktionen mit Ableitungen an.

Sei $D \subset \mathbb{R}^m$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so daß die im folgenden auftretenden Argumente von f in D liegen. Weiter seien $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$, $\nu \in \mathbb{R}^m$, $r \in \mathbb{N}_0$ und $t \in \mathbb{R}$. Zur Definition der Stetigkeitsmoduln benötigen wir die **radiale Differenz**

$$\Delta_\nu^r f(x) := \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f(x + j\nu) \quad (2.11)$$

(damit ist $\Delta_\nu^r f = \Delta_\nu^{r-1} \Delta_\nu^1 f = \Delta_\nu^1 \Delta_\nu^{r-1} f$) sowie die **gemischte Differenz**

$$\Delta_\nu^\alpha f(x) = \Delta_{\nu_1 e_1}^{\alpha_1} \Delta_{\nu_2 e_2}^{\alpha_2} \dots \Delta_{\nu_m e_m}^{\alpha_m} f(x),$$

wobei wir zur Abkürzung noch die Schreibweise

$$\Delta_t^\alpha f(x) := \Delta_{t \sum_{j=1}^m e_j}^\alpha f(x) = \Delta_{(t,t,\dots,t)}^\alpha f(x)$$

benutzen. Mit dem Mittelwertsatz läßt sich zeigen, daß (vgl. (2.1))

$$\Delta_\nu^{r+1} f(x) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{P}_r, \quad \Delta_{te_j}^{r+1} f(x) = 0 \quad \forall f \in \mathcal{P}^r, \quad 1 \leq j \leq m. \quad (2.12)$$

Allerdings gilt nicht generell $\Delta_\nu^{r+1} f \equiv 0$ für $f \in \mathcal{P}^r$, z.B. ist für $f(x) = x_1 x_2 \in \mathcal{P}^1(\mathbb{R}^2)$ und $t \neq 0$:

$$\Delta_{(t,t)}^2 f(x) = (x_1 + 2t)(x_2 + 2t) - 2(x_1 + t)(x_2 + t) + x_1 x_2 = 2t^2 \neq 0. \quad (2.13)$$

Wir definieren zur offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ die Mengen

$$\begin{aligned} \Omega(\nu) &:= \{x \in \Omega : x + t\nu \in \Omega, 0 \leq t \leq 1\}, \\ \Omega[\nu] &:= \{x \in \Omega : x + (t_1 \nu_1, \dots, t_m \nu_m) \in \Omega, 0 \leq t_j \leq 1, 1 \leq j \leq m\}, \end{aligned}$$

die dazu dienen, daß die in den folgenden Definitionen verwendeten Differenzen wohldefiniert sind. Der **radiale Modul** der Ordnung r einer Funktion $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, bzw. $f \in C(\overline{\Omega})$ ist definiert als

$$\begin{aligned} \omega_r(\delta, f, L^p(\Omega)) &:= \sup\{\|\Delta_\nu^r f\|_{L^p(\Omega(r\nu))} : |\nu| \leq \delta\}, \\ \omega_r(\delta, f, C(\overline{\Omega})) &:= \sup\{\|\Delta_\nu^r f\|_{C(\overline{\Omega}(r\nu))} : |\nu| \leq \delta\}. \end{aligned}$$

Analog führen wir **gemischte Moduln** ein:

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_\alpha(\delta, f, L^p(\Omega)) &:= \sup\{\|\Delta_\nu^\alpha f\|_{L^p(\Omega[(\alpha_1 \nu_1, \dots, \alpha_m \nu_m)])} : |\nu_1| \leq \delta, \dots, |\nu_m| \leq \delta\}, \\ \overline{\omega}_\alpha(\delta, f, C(\overline{\Omega})) &:= \sup\{\|\Delta_\nu^\alpha f\|_{C(\overline{\Omega}[(\alpha_1 \nu_1, \dots, \alpha_m \nu_m)])} : |\nu_1| \leq \delta, \dots, |\nu_m| \leq \delta\} \end{aligned}$$

sowie

$$\bar{\omega}_r(\delta, f, L^p(\Omega)) := \sum_{|\alpha|=r} \bar{\omega}_\alpha(\delta, f, L^p(\Omega)), \quad \bar{\omega}_r(\delta, f, C(\bar{\Omega})) := \sum_{|\alpha|=r} \bar{\omega}_\alpha(\delta, f, C(\bar{\Omega})).$$

Damit definieren wir die folgenden Moduln mit Ableitungen: Für $s \in \mathbb{N}_0$ und $f \in W^{s,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, bzw. $f \in C^s(\bar{\Omega})$ sei

$$\begin{aligned} \omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) &:= \sum_{|\beta|=s} \omega_r(\delta, D^\beta f, L^p(\Omega)), & \omega_r^{(s)}(\delta, f, C(\bar{\Omega})) &:= \sum_{|\beta|=s} \omega_r(\delta, D^\beta f, C(\bar{\Omega})), \\ \bar{\omega}_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) &:= \sum_{|\beta|=s} \bar{\omega}_r(\delta, D^\beta f, L^p(\Omega)), & \bar{\omega}_r^{(s)}(\delta, f, C(\bar{\Omega})) &:= \sum_{|\beta|=s} \bar{\omega}_r(\delta, D^\beta f, C(\bar{\Omega})). \end{aligned}$$

Der Modul $\bar{\omega}_r(\delta, f, L^p(\Omega))$ ist Spezialfall eines Λ -Moduls. Diese partiellen Moduln werden in dieser Arbeit nur indirekt benutzt. Dennoch müssen wir etwas Terminologie betreiben:

Definition 2.14 (siehe [24]) Sei $\Lambda \subset \mathbb{N}_0^m$, $\Lambda \neq \emptyset$ und beschränkt. Gilt zusätzlich für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^m$, daß aus $\alpha \in \Lambda$ und $\beta \leq \alpha$ auch $\beta \in \Lambda$ folgt, so heißt Λ **vollständig** bzw. **vollständiger Λ -Bereich**. Dann definieren wir

$$\partial\Lambda := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^m : \alpha \notin \Lambda, \text{ aber falls } \beta < \alpha, \text{ folgt } \beta \in \Lambda\}.$$

Schließlich setzen wir noch

$$|\Lambda| := \max\{|\alpha| : \alpha \in \partial\Lambda\}.$$

Beispiele vollständiger Λ -Bereiche für $m = 2$:

$$\begin{array}{ll} \Lambda = \{(i, j) : i, j \in \{0, 1, 2\}\} \setminus \{(2, 2)\} & \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \circ \\ \hline \circ \\ \hline \circ \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} & \Lambda = \{(i, j) : i, j \in \{0, 1, 2\}\} & \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \circ \\ \hline \circ \\ \hline \circ \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} \\ \partial\Lambda = \{(0, 3), (3, 0), (2, 2)\} & \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \circ \\ \hline \circ \\ \hline \circ \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} & \partial\Lambda = \{(0, 3), (3, 0)\} & \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \circ \\ \hline \circ \\ \hline \circ \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Nach Definition 2.14 muß in $\partial\Lambda$ eine Menge der Form $\{(r_1, 0, 0, \dots), (0, r_2, 0, \dots), \dots\}$ enthalten sein. Für vollständiges $\Lambda \subset \mathbb{N}_0^m$ ist der **gemischte Λ -Modul** ω_Λ definiert durch

$$\omega_\Lambda(\delta, f, L^p(\Omega)) := \sum_{\alpha \in \partial\Lambda} \bar{\omega}_\alpha(\delta, f, L^p(\Omega))$$

(und entsprechend für $C(\bar{\Omega})$). Außerdem benötigen wir später zusätzlich zu \mathcal{P}_r und \mathcal{P}^r (vgl. (2.1)) die folgenden Mengen von Polynomen:

$$\mathcal{P}_\Lambda := \{g \in \mathcal{P}^{|\Lambda|} : D^\alpha g = 0 \quad \forall \alpha \in \partial\Lambda\}. \quad (2.14)$$

Dabei sind \mathcal{P}_r und \mathcal{P}^r Spezialfälle dieser Definition für $\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^m : |\alpha| \leq r\}$ und $\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^m : \alpha_j \leq r, 1 \leq j \leq m\}$.

Wir wenden uns nun den Eigenschaften der Stetigkeitsmoduln zu.

Definition 2.15 Sei X ein linearer, normierter Raum. Mit X^\sim bezeichnen wir den zugehörigen Raum der sublinearen, beschränkten, nicht-negativ-wertigen Funktionale über X . Dabei heißt ein Funktional $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ **sublinear**, falls

$$\begin{aligned} |F(f+g)| &\leq |Ff| + |Fg| \quad \forall f, g \in X && \text{(subadditiv)} \\ |F(\nu f)| &= |\nu| |Ff| \quad \forall f \in X, \nu \in \mathbb{R} && \text{(absolut homogen)}, \end{aligned}$$

es ist **nicht-negativ-wertig**, falls $Ff \geq 0$ für alle $f \in X$, und es ist **beschränkt**, falls

$$\|F\|_{X^\sim} := \sup\{|Ff| : f \in X, \|f\|_X = 1\} < \infty.$$

Die Stetigkeitsmoduln sind sublineare, beschränkte, nicht-negativ-wertige Funktionale. Diese und weitere wichtige Eigenschaften werden speziell für die radialen Moduln im folgenden Lemma zusammengefaßt. Entsprechende Aussagen gelten auch unter geeigneten Voraussetzungen für die Λ -Moduln. Wir beschränken uns außerdem auf den L^p -Fall, $1 \leq p < \infty$, da sich für die Moduln bezüglich der Supremum-Norm keine wesentlichen Unterschiede ergeben.

Lemma 2.16 Gegeben seien die offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ sowie $f \in W^{s,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $s \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$.

a) $\omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega))$ ist ein sublineares, beschränktes, nicht-negativ-wertiges Funktional auf $W^{s,p}(\Omega)$, und es gilt (C unabhängig von δ und f):

$$\omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) \leq C|f|_{s,p,\Omega}.$$

b) $\omega_r^{(s)}(n\delta, f, L^p(\Omega)) \leq n^r \omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega))$ für $n \in \mathbb{N}$.

c) $\omega_r^{(s)}(\lambda\delta, f, L^p(\Omega)) \leq (1+\lambda)^r \omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega))$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

d) $\omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) \leq 2^j \omega_{r-j}^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega))$ für $0 \leq j \leq r$.

e) Ist zusätzlich $f \in W^{s+j,p}(\Omega)$ für ein $1 \leq j \leq r$, so existiert eine von δ und f unabhängige Konstante C , so daß

$$\omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) \leq C\delta^j \omega_{r-j}^{(s+j)}(\delta, f, L^p(\Omega)).$$

Insbesondere gilt für $f \in W^{r+s,p}(\Omega)$:

$$\omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) \leq C\delta^r |f|_{r+s,p,\Omega}.$$

f) Für $0 < \delta_2 \leq \delta_1$ gilt:

$$\frac{\omega_r^{(s)}(\delta_1, f, L^p(\Omega))}{\delta_1^r} \leq 2^r \frac{\omega_r^{(s)}(\delta_2, f, L^p(\Omega))}{\delta_2^r}.$$

g) Sei Ω zusätzlich ein LG-Gebiet. Zu $1 \leq j < r$ existiert eine Konstante $C = C(r, \Omega)$, so daß für $0 < \delta \leq 1$ die folgende Marchaud-Ungleichung gilt:

$$\omega_j^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) \leq C \left(\delta^j |f|_{s,p,\Omega} + \delta^j \int_{\delta}^1 t^{-1-j} \omega_r^{(s)}(t, f, L^p(\Omega)) dt \right).$$

h) Seien Ω ein LG-Gebiet und $s < r$. Dann existiert eine von δ und f unabhängige Konstante C , so daß

$$\omega_{r-s}^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) \leq C \int_0^{\delta} t^{-1-s} \omega_r(t, f, L^p(\Omega)) dt. \quad (2.15)$$

Beweis Für $s = 0$ findet man den Beweis in [59]. Der Übergang zu allgemeinem $s \in \mathbb{N}_0$ ist aber trivial. ■

Im Umgang mit Stetigkeitsmoduln sind K-Funktionale ein wichtiges Hilfsmittel. Statt direkt gegen Stetigkeitsmoduln abzuschätzen, werden wir später vielfach zunächst über das K-Funktional formulierte Fehlerschranken herleiten. Dies ist wegen der aus der Numerischen Analysis bekannten Jackson-Ungleichungen besonders einfach. Ein Äquivalenzsatz zwischen K-Funktional und Stetigkeitsmodul führt dann auf die gewünschten Stetigkeitsmoduln.

Definition 2.17 Sei X ein linearer Raum mit Norm (oder Halbnorm) $\|\cdot\|_X$ und $U \subset X$ ein Teilraum, versehen mit der Halbnorm $|\cdot|_U$. Dann definieren wir für $f \in X$ und $\delta > 0$ das **K-Funktional** vermöge

$$K(\delta, f, X, U) := K(\delta, f, (X, \|\cdot\|_X), (U, |\cdot|_U)) := \inf_{g \in U} (\|f - g\|_X + \delta |g|_U).$$

Ist eine Jackson-Typ-Ungleichung bekannt, erhält man wie bereits angekündigt sofort auch eine Abschätzung gegen das K-Funktional (vgl. [19], Bezeichnungen wie in Definition 2.17): Erfüllt die Familie $\{T_\delta : \delta > 0\} \subset X^\sim$ eine Stabilitätsungleichung $\|T_\delta\|_{X^\sim} \leq C_1$ für alle $\delta > 0$ und die Jackson-Typ-Ungleichung

$$T_\delta g \leq C_2 \delta |g|_U \quad \forall g \in U, \delta > 0,$$

so folgt für $f \in X$ und jedes $g \in U$

$$T_\delta f \leq T_\delta(f - g) + T_\delta g \leq C_1 \|f - g\|_X + T_\delta g \leq \max\{C_1, C_2\} [\|f - g\|_X + \delta |g|_U],$$

so daß der Übergang zum Infimum bezüglich $g \in U$ liefert:

$$T_\delta f \leq \max\{C_1, C_2\} K(\delta, f, X, U) \quad \forall f \in X, \delta > 0. \quad (2.16)$$

Bevor wir zu den Beziehungen zwischen K-Funktional und Stetigkeitsmodul kommen, geben wir zunächst einige elementare Eigenschaften an.

Lemma 2.18 Sei X ein linearer, normierter Raum und $\|\cdot\|_{\hat{X}}$ eine weitere Norm auf X mit $\|f\|_{\hat{X}} \leq \|f\|_X$ für alle $f \in X$. Weiter sei $U \subset X$ ein Teilraum, versehen mit einer Norm $\|\cdot\|_U$ und einer Halbnorm $|\cdot|_U$.

a) Für $f \in X$ und $g \in U$ gilt:

$$K(\delta, f, X, U) \leq \|f\|_X, \quad K(\delta, g, X, U) \leq \delta|g|_U. \quad (2.17)$$

Insbesondere ist das K -Funktional ein sublineares, beschränktes, nicht-negativwertiges Funktional, also $K(\delta, \cdot, X, U) \in X^\sim$.

b) Falls eine Konstante C existiert, so daß

$$\|g\|_U \leq C[\|g\|_{\hat{X}} + |g|_U] \quad \forall g \in U,$$

dann gilt für $0 < \delta \leq 1$:

$$K(\delta, f, (X, \|\cdot\|_X), (U, \|\cdot\|_U)) \leq (C+1)K(\delta, f, X, U) + C\delta\|f\|_{\hat{X}}. \quad (2.18)$$

Beweis a) ist trivial, zu b): Sei $g \in U$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned} K(\delta, f, (X, \|\cdot\|_X), (U, \|\cdot\|_U)) &\leq \|f - g\|_X + \delta\|g\|_U \\ &\leq \|f - g\|_X + C\delta[\|g\|_{\hat{X}} + |g|_U] \\ &\leq \|f - g\|_X + C\delta[\|f - g\|_{\hat{X}} + \|f\|_{\hat{X}} + |g|_U] \\ &\stackrel{\delta \leq 1}{\leq} \|\cdot\|_{\hat{X}} \leq \|\cdot\|_X \\ &\leq [(C+1)\|f - g\|_X + C\delta|g|_U] + C\delta\|f\|_{\hat{X}}. \end{aligned}$$

■

Jetzt zum bereits angekündigten fundamentalen Äquivalenzsatz, der eine Verallgemeinerung des Satzes von Johnen und Scherer [59] ist und dessen Beweis wegen seiner Länge im Anhang geführt wird.

Satz 2.19 Die beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ habe einen Lipschitz-Rand, d.h., Ω ist ein LG-Gebiet (vgl. Kapitel 2.1.2). Weiter seien $r \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{N}_0$. Dann existieren Konstanten $0 < c, C < \infty$, so daß für $0 < \delta \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned} c\omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) &\leq K(\delta^r, f, (W^{s,p}(\Omega), |\cdot|_{s,p,\Omega}), (W^{r+s,p}(\Omega), |\cdot|_{r+s,p,\Omega})) \\ &\leq K(\delta^r, f, (W^{s,p}(\Omega), \|\cdot\|_{s,p,\Omega}), (W^{r+s,p}(\Omega), |\cdot|_{r+s,p,\Omega})) \\ &\leq C\omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) \quad \forall f \in W^{s,p}(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty, \\ c\omega_r^{(s)}(\delta, f, C(\bar{\Omega})) &\leq K(\delta^r, f, (C^s(\bar{\Omega}), |\cdot|_{s,\bar{\Omega}}), (C^{r+s}(\bar{\Omega}), |\cdot|_{r+s,\bar{\Omega}})) \\ &\leq K(\delta^r, f, (C^s(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{s,\bar{\Omega}}), (C^{r+s}(\bar{\Omega}), |\cdot|_{r+s,\bar{\Omega}})) \\ &\leq C\omega_r^{(s)}(\delta, f, C(\bar{\Omega})) \quad \forall f \in C^s(\bar{\Omega}). \end{aligned}$$

Dabei sind die Konstanten c und C von f und δ unabhängig.

Wir diskutieren in den folgenden Kapiteln Randwertprobleme. Die daraus resultierenden Fehlerfunktionale sind nur für Funktionen definiert, die der Randbedingung genügen. Schätzt man in diesem Zusammenhang direkt gegen ein K-Funktional ab (vgl. (2.16)), so bräuchte man z.B. einen Äquivalenzsatz für das K-Funktional $K(\delta, f, (W_0^{1,2}(\Omega), |\cdot|_{1,2,\Omega}), (W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{r+1,2}(\Omega), |\cdot|_{r+1,2,\Omega}))$. Die beim Beweis von Satz 2.19 verwendete Technik des Glättens mit Steklov-Mitteln verträgt sich jedoch nicht mit den Randbedingungen des Raums $W_0^{1,2}(\Omega)$ (vgl. (2.5)). Die auftretenden Probleme werden in [67, S.171ff] beschrieben. In höheren Dimensionen umgehen wir sie, indem wir in Kapitel 3 die dort relevanten Abschätzungen mittels Lagrange-Interpolation bzw. mittels Quasi-Interpolation von den Randbedingungen befreien. In einer Dimension ist dagegen die folgende Aussage fast trivial:

Lemma 2.20 *Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und $f \in C_0[a, b] \cap C^s[a, b]$, $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$ mit $r + s > 1$. Dann existiert eine von f und δ unabhängige Konstante C , so daß*

$$\begin{aligned} & K(\delta, f, (C^s[a, b], \|\cdot\|_{s,[a,b]}), (C^{r+s}[a, b], |\cdot|_{r+s,[a,b]})) \\ & \leq K(\delta, f, (C_0[a, b] \cap C^s[a, b], \|\cdot\|_{s,[a,b]}), (C_0[a, b] \cap C^{r+s}[a, b], |\cdot|_{r+s,[a,b]})) \\ & \leq CK(\delta, f, (C^s[a, b], \|\cdot\|_{s,[a,b]}), (C^{r+s}[a, b], |\cdot|_{r+s,[a,b]})). \end{aligned}$$

Beweis Die erste Ungleichung ist klar, da $C_0[a, b] \cap C^{r+s}[a, b] \subset C^{r+s}[a, b]$. Zum Beweis der zweiten Ungleichung definieren wir für $f \in C^s[a, b]$

$$\begin{aligned} Ff & := K\left(\delta, f(\cdot) - f(a) + \frac{\cdot - a}{b - a}(f(a) - f(b)), \right. \\ & \quad \left. (C_0[a, b] \cap C^s[a, b], \|\cdot\|_{s,[a,b]}), (C_0[a, b] \cap C^{r+s}[a, b], |\cdot|_{r+s,[a,b]})\right). \end{aligned}$$

Damit ist F nach Lemma 2.18a) ein sublineares, nicht-negativ-wertiges Funktional auf $C^s[a, b]$ und

$$\begin{aligned} Ff & \stackrel{(2.17)}{\leq} \left\| f(\cdot) - f(a) + \frac{\cdot - a}{b - a}(f(a) - f(b)) \right\|_{s,[a,b]} \\ & \leq \left(4 + \frac{2}{b - a}\right) \|f\|_{C[a,b]} + \sum_{j=1}^s |f|_{j,[a,b]} \leq \left(4 + \frac{2}{b - a}\right) \|f\|_{s,[a,b]}. \end{aligned}$$

Ist $g \in C^{r+s}[a, b]$, so gilt außerdem

$$Fg \stackrel{(2.17)}{\leq} \delta \left| g(\cdot) - g(a) + \frac{\cdot - a}{b - a}(g(a) - g(b)) \right|_{r+s,[a,b]} \stackrel{r+s>1}{=} \delta |g|_{r+s,[a,b]}.$$

Insgesamt folgt damit für $f \in C^s[a, b]$ (vgl. (2.16)):

$$Ff \leq \left(4 + \frac{2}{b - a}\right) K(\delta, f, (C^s[a, b], \|\cdot\|_{s,[a,b]}), (C^{r+s}[a, b], |\cdot|_{r+s,[a,b]})).$$

Da aber speziell für $f \in C_0[a, b] \cap C^s[a, b]$ gilt

$$Ff = K(\delta, f, (C_0[a, b] \cap C^s[a, b], \|\cdot\|_{s,[a,b]}), (C_0[a, b] \cap C^{r+s}[a, b], |\cdot|_{r+s,[a,b]})),$$

folgt die Aussage. ■

Beim Beweis einiger Fehlerschranken zu gewöhnlichen Differentialgleichungen in Kapitel 5 benutzen wir die bereits angegebenen Resultate in der folgenden Form:

Folgerung 2.21 *Seien $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$ mit $r + s > 1$. Für alle $f \in C_0[a, b] \cap C^s[a, b]$ und $0 < \delta \leq 1$ gilt:*

$$\begin{aligned} & K(\delta^r, f, (C_0[a, b] \cap C^s[a, b], \|\cdot\|_{s,[a,b]}), (C_0[a, b] \cap C^{r+s}[a, b], \|\cdot\|_{r+s,[a,b]})) \\ & \leq C[\omega_r^{(s)}(\delta, f, C[a, b]) + \delta^r \|f\|_{C[a,b]}. \end{aligned}$$

Beweis Wegen Folgerung A.8 benutzen wir (2.18) mit den Daten

$$X = C_0[a, b] \cap C^s[a, b], \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{s,[a,b]}, \quad \|\cdot\|_{\hat{X}} = \|\cdot\|_{C[a,b]},$$

$$U = C_0[a, b] \cap C^{r+s}[a, b], \quad \|\cdot\|_U = \|\cdot\|_{r+s,[a,b]}, \quad |\cdot|_U = |\cdot|_{r+s,[a,b]}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} & K(\delta^r, f, (C_0[a, b] \cap C^s[a, b], \|\cdot\|_{s,[a,b]}), (C_0[a, b] \cap C^{r+s}[a, b], \|\cdot\|_{r+s,[a,b]})) \\ & \stackrel{(2.18)}{\leq} C_1 \left[K(\delta^r, f, (C_0[a, b] \cap C^s[a, b], \|\cdot\|_{s,[a,b]}), (C_0[a, b] \cap C^{r+s}[a, b], |\cdot|_{r+s,[a,b]})) \right. \\ & \quad \left. + \delta^r \|f\|_{C[a,b]} \right] \\ & \stackrel{\text{Lemma 2.20}}{\leq} C_1 \left[C_2 K(\delta^r, f, (C^s[a, b], \|\cdot\|_{s,[a,b]}), (C^{r+s}[a, b], |\cdot|_{r+s,[a,b]})) + \delta^r \|f\|_{C[a,b]} \right] \\ & \stackrel{\text{Satz 2.19}}{\leq} C_3 \omega_r^{(s)}(\delta, f, C[a, b]) + C_1 \delta^r \|f\|_{C[a,b]}. \end{aligned}$$

■

Wir schließen noch ein (wohlbekanntes) Saturations-Lemma an, das wir der Vollständigkeit halber auch beweisen.

Lemma 2.22 *Das beschränkte Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ habe einen Lipschitz-Rand, und seien $r \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{N}_0$. Ist $f \in W^{s,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, so daß*

$$\omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) = o(\delta^r),$$

dann stimmt f f.ü. mit einem Polynom aus \mathcal{P}_{r+s-1} überein. Die Aussage gilt analog für den $\omega_r^{(s)}(\delta, f, C(\bar{\Omega}))$ -Modul.

Beweis Zunächst ist

$$\begin{aligned} & K(\delta^r, f, (L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}), (W^{r+s,p}(\Omega), |\cdot|_{r+s,p,\Omega})) \\ & \leq K(\delta^r, f, (W^{s,p}(\Omega), \|\cdot\|_{s,p,\Omega}), (W^{r+s,p}(\Omega), |\cdot|_{r+s,p,\Omega})) \\ & \stackrel{\text{Satz 2.19}}{\leq} C \omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) = o(\delta^r). \end{aligned}$$

Damit existiert eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W^{r+s,p}(\Omega)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_{L^p(\Omega)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |g_n|_{r+s,p,\Omega} = 0, \quad (2.19)$$

denn zu $\delta = 1/n$ läßt sich durch Auflösen des Infimums ein $g_n \in W^{r+s,p}(\Omega)$ so wählen, daß

$$\begin{aligned} & \|f - g_n\|_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{n^r} |g_n|_{r+s,p,\Omega} \\ & \leq K(n^{-r}, f, (L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}), (W^{r+s,p}(\Omega), |\cdot|_{r+s,p,\Omega})) + \frac{1}{n^{r+1}} = o\left(\frac{1}{n^r}\right). \end{aligned}$$

Insbesondere ist damit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ und in der $|\cdot|_{r+s,p,\Omega}$ -Halbnorm. Wegen Folgerung A.8 ist $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dann auch eine Cauchy-Folge im Raum $W^{r+s,p}(\Omega)$ und konvergiert daher gegen ein $g \in W^{r+s,p}(\Omega)$. Nach (2.19) ist außerdem $f = g$ (f.ü.) und $|g|_{r+s,p,\Omega} = 0$. Da Ω zusammenhängend ist, stimmt g f.ü. mit einem Element aus \mathcal{P}_{r+s-1} überein (siehe z.B. [81, S.60]). ■

Auch die Λ -Moduln sind zu einem geeigneten K -Funktional äquivalent, das aber formal nicht genau der Definition 2.17 entspricht. Hier muß $\partial\Lambda$ eingebaut werden. Dahmen, DeVore und Scherer [24] folgend definieren wir für einen vollständigen Λ -Bereich und $1 \leq p < \infty$:

$$K_\Lambda(\delta, f, L^p(\Omega)) := \inf_{g \in W^{|\Lambda|,p}(\Omega)} \left[\|f - g\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{\alpha \in \partial\Lambda} \delta^{|\alpha|} \|D^\alpha g\|_{L^p(\Omega)} \right].$$

Im Gegensatz zu [24] haben wir dabei auf die Einführung an Λ -Bereiche angepaßter Sobolev-Räume $W_p^\Lambda(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega) \forall \alpha \in \partial\Lambda\}$ verzichtet.

Satz 2.23 (vgl. [24, S.389], vgl. Satz 2.19) *Die offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ habe die Rechteck-Eigenschaft (siehe Definition 2.5), und $\Lambda \subset \mathbb{N}_0^m$ sei vollständig. Dann existieren Konstanten $0 < c, C < \infty$, so daß für alle $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, und $0 < \delta \leq 1$ gilt:*

$$c \omega_\Lambda(\delta, f, L^p(\Omega)) \leq K_\Lambda(\delta, f, L^p(\Omega)) \leq C \omega_\Lambda(\delta, f, L^p(\Omega)).$$

Diese Äquivalenz ist Spezialfall von [24, Theorem 3.1], wo noch allgemeinere Gebiete zugelassen sind. Man beachte beim dort skizzierten Beweis, daß wegen Lemma 2.8c) f durch eine auf Ω eingeschränkte Funktion aus $C_{00}^\infty(\mathbb{R}^m)$ ersetzt werden kann. Damit

liegen die bei der Abschätzung nach oben über Steklov-Mittel gebildeten Funktionen nicht nur in $W_p^\Lambda(\Omega)$ sondern sogar in $W^{|\Lambda|,p}(\Omega)$.

Für spezielle Setzungen sind radialer und Λ -Modul doch nicht so verschieden, wie es zunächst erscheint (vgl. zweites Beispiel nach Definition 2.14):

Lemma 2.24 *Die offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ habe die Rechteck-Eigenschaft (Definition 2.5), und seien $r \in \mathbb{N}$ und $\Lambda = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^m : \alpha_j < r, 1 \leq j \leq m\}$, d.h. $\partial\Lambda = \{re_j : 1 \leq j \leq m\}$. Dann existieren Konstanten $0 < c, C < \infty$, so daß für $0 < \delta \leq 1$ und $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, gilt:*

$$c\omega_\Lambda(\delta, f, L^p(\Omega)) \leq \omega_r(\delta, f, L^p(\Omega)) \leq C [\omega_\Lambda(\delta, f, L^p(\Omega)) + \delta^r \|f\|_{L^p(\Omega)}].$$

Beweis Zunächst ist Ω nach Definition 2.5 insbesondere ein beschränktes LG-Gebiet, so daß wir den Satz 2.19 benutzen können. Damit folgt:

$$\begin{aligned} & \omega_r(\delta, f, L^p(\Omega)) \\ & \stackrel{\text{Satz 2.19}}{\leq} K(\delta^r, f, (L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}), (W^{r,p}(\Omega), |\cdot|_{r,p,\Omega})) \\ & = \inf_{g \in W^{r,p}(\Omega)} (\|f - g\|_{L^p(\Omega)} + \delta^r |g|_{r,p,\Omega}) \\ & \stackrel{(A.20)}{\leq} \inf_{g \in W^{r,p}(\Omega)} \left(\|f - g\|_{L^p(\Omega)} + C_1 \delta^r \left[\sum_{j=1}^m \|D^{re_j} g\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} \right] \right) \\ & \leq \inf_{g \in W^{r,p}(\Omega)} \left(\|f - g\|_{L^p(\Omega)} + C_1 \delta^r \left[\sum_{j=1}^m \|D^{re_j} g\|_{L^p(\Omega)} + \|f - g\|_{L^p(\Omega)} + \|f\|_{L^p(\Omega)} \right] \right) \\ & \leq C_1 \delta^r \|f\|_{L^p(\Omega)} + (C_1 + 1) \inf_{g \in W^{r,p}(\Omega)} \left(\|f - g\|_{L^p(\Omega)} + \delta^r \sum_{j=1}^m \|D^{re_j} g\|_{L^p(\Omega)} \right) \\ & = C_1 \delta^r \|f\|_{L^p(\Omega)} + (C_1 + 1) K_\Lambda(\delta, f, L^p(\Omega)) \\ & \stackrel{\text{Satz 2.23}}{\leq} C_1 \delta^r \|f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \omega_\Lambda(\delta, f, L^p(\Omega)). \end{aligned}$$

Außerdem ist die erste Ungleichung trivial, da $\bar{\omega}_{re_j}(\delta, f, L^p(\Omega)) \leq \omega_r(\delta, f, L^p(\Omega))$. ■

2.3 Reelle Interpolation von Banach-Räumen

Die über (2.9) eingeführten fraktionierten Sobolev-Räume besitzen eine handliche Darstellung als Interpolationsräume, die wir für konkrete Berechnungen ausnutzen.

Seien X und U Banach-Räume mit $U \subset_{\text{st}} X$. Für $0 < \Theta < 1$ und $1 \leq q < \infty$ definieren wir (vgl. [17, S.168])

$$\|f\|_{[X,U]_{\Theta,q}} = \left(\int_0^\infty t^{-\Theta q} K\left(t, f, (X, \|\cdot\|_X), (U, \|\cdot\|_U)\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}.$$

Dann ist $[X, U]_{\Theta, q} := \{f \in X : \|f\|_{[X, U]_{\Theta, q}} < \infty\}$ ein Banach-Raum unter der Norm $\|\cdot\|_{[X, U]_{\Theta, q}}$. Außerdem sind die Interpolationsräume stetig ineinander eingebettet:

$$U \subset_{\text{st}} [X, U]_{\Theta_1, q} \subset_{\text{st}} [X, U]_{\Theta_2, q} \subset_{\text{st}} X \quad \forall 0 < \Theta_2 \leq \Theta_1 < 1, 1 \leq q < \infty. \quad (2.20)$$

Insbesondere ist damit auch $[X, X]_{\Theta, q} = X$, und die Normen beider Räume sind äquivalent.

Lemma 2.25 *Ist $f \in U$, $U \subset_{\text{st}} X$, so gilt für $1 \leq q < \infty$:*

$$\|f\|_{[X, U]_{\Theta, q}} \leq \left(\frac{1}{\Theta(1-\Theta)q} \right)^{1/q} \|f\|_X^{1-\Theta} \|f\|_U^{\Theta}.$$

Beweis Für $f \neq 0$ sei $\varepsilon := \|f\|_X / \|f\|_U$:

$$\begin{aligned} \|f\|_{[X, U]_{\Theta, q}}^q &= \int_0^\infty t^{-\Theta q} K(t, f, (X, \|\cdot\|_X), (U, \|\cdot\|_U))^q \frac{dt}{t} \\ &\stackrel{(2.17)}{\leq} \int_0^\varepsilon t^{-\Theta q} t^q \|f\|_U^q \frac{dt}{t} + \int_\varepsilon^\infty t^{-\Theta q} \|f\|_X^q \frac{dt}{t} \\ &= \|f\|_U^q \left[\frac{1}{(1-\Theta)q} t^{(1-\Theta)q} \right]_0^\varepsilon + \|f\|_X^q \left[-\frac{1}{\Theta q} t^{-\Theta q} \right]_\varepsilon^\infty \\ &= \frac{1}{(1-\Theta)q} \|f\|_X^{(1-\Theta)q} \|f\|_U^{\Theta q} + \frac{1}{\Theta q} \|f\|_X^{(1-\Theta)q} \|f\|_U^{\Theta q}. \end{aligned}$$

■

Was für die Normen der Elemente gilt, folgt auch für die Operatornormen:

Lemma 2.26 *(siehe z.B. [9, S.279]) Seien $U_1 \subset_{\text{st}} X_1$ und $U_2 \subset_{\text{st}} X_2$ zwei Paare von Banach-Räumen und $T \in [X_1, X_2]$, so daß $T|_{U_1} \in [U_1, U_2]$. Für $0 < \Theta < 1$ und $1 \leq q < \infty$ ist dann auch $T \in [[X_1, U_1]_{\Theta, q}, [X_2, U_2]_{\Theta, q}]$ und*

$$\|T\|_{[[X_1, U_1]_{\Theta, q}, [X_2, U_2]_{\Theta, q}]} \leq \|T\|_{[X_1, X_2]}^{1-\Theta} \|T\|_{[U_1, U_2]}^{\Theta}. \quad (2.21)$$

Wir haben die Interpolationsräume für die folgende Charakterisierung eingeführt.

Satz 2.27 *(siehe z.B. [9, S.180f]) Die beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ habe einen Lipschitz-Rand. Seien $s \in \mathbb{N}_0$ und $\Theta \in (0, 1)$. Dann gilt*

$$[W^{s, p}(\Omega), W^{s+1, p}(\Omega)]_{\Theta, p} = W^{s+\Theta, p}(\Omega),$$

und die Normen beider Räume sind äquivalent. Ist $p = 2$, so gilt darüber hinaus für $s_1, s_2 \in \mathbb{N}_0$, $s_1 < s_2$,

$$[W^{s_1, 2}(\Omega), W^{s_2, 2}(\Omega)]_{\Theta, 2} = W^{(1-\Theta)s_1 + \Theta s_2, 2}(\Omega), \quad (2.22)$$

wobei die zugehörigen Normen wieder äquivalent sind. Insbesondere sind für $p = 2$ also auch die klassischen, nicht-fraktionierten Sobolev-Räume auf der rechten Seite zugelassen.

Zusammen mit (2.20) folgt damit sofort auch

$$W^{\nu_1, 2}(\Omega) \subset_{\text{st}} W^{\nu_2, 2}(\Omega) \quad \forall 0 \leq \nu_2 \leq \nu_1 \in \mathbb{R}.$$

2.4 Resonanzprinzipien und ein Umkehrsatz

Das Hauptanliegen dieser Arbeit ist die Untersuchung der Schärfe von Fehlerschranken durch Angabe geeigneter Gegenbeispiele. Deren Konstruktion gestaltet sich i.a. schwierig, so daß wir ihre Existenz mit quantitativen Erweiterungen des Prinzips der gleichmäßigen Beschränktheit (uniform boundedness principle, kurz UBP) zeigen. Daneben werden wir auch Schärfe im Sinne von Umkehrsätzen diskutieren und hier dazu die funktionalanalytische Grundlage angeben.

Die Fehlerabschätzungen werden über Stetigkeitsmoduln formuliert sein. Um das asymptotische Verhalten dieser Stetigkeitsmoduln in einem gegenüber Lipschitz-Klassen allgemeineren Rahmen zu beschreiben, ist es üblich, abstrakte Stetigkeitsmoduln zu benutzen:

Definition 2.28 (vgl. [92, S.96]) Eine Funktion $\omega \in C[0, \infty)$ heißt **abstrakter Stetigkeitsmodul**, falls für alle $\delta_1, \delta_2 > 0$ gilt:

$$0 = \omega(0) < \omega(\delta_1) \leq \omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2). \quad (2.23)$$

Entweder erfüllt ein abstrakter Stetigkeitsmodul die Bedingung

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\omega(\delta)}{\delta} = \infty, \quad (2.24)$$

oder es gibt Konstanten $0 < c, C < \infty$ und $\delta_0 > 0$ mit

$$c\delta \leq \omega(\delta) \leq C\delta \quad \forall 0 \leq \delta \leq \delta_0.$$

Im zweiten Fall ist also das Verhalten des Moduls $\omega(\delta) = \delta$ beim Grenzübergang $\delta \rightarrow 0+$ charakteristisch.

Ausgangspunkt für die quantitativen Erweiterungen ist das folgende klassische Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, das häufig auch als Satz von Banach-Steinhaus bezeichnet wird:

Satz 2.29 (vgl. z.B. [2, S.205]) Seien X ein Banach-Raum, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X^\sim$ sowie $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, so daß

$$\|g_n\|_X \leq C_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.25)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} T_n g_n = \infty. \quad (2.26)$$

Dann existiert ein (Gegenbeispiel) $f_0 \in X$ mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} T_n f_0 = \infty$, oder mit anderen Worten: $T_n f_0 \neq \mathcal{O}(1)$.

Die Elemente g_n stehen im Sinne von (2.26) in Resonanz zu den Operatoren T_n . Daher wird $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch als Resonanzfolge und Satz 2.29 als Resonanzprinzip bezeichnet. Der Beweis kann u.a. mit dem Baire-Kategoriensatz oder der Methode des gleitenden Höckers geführt werden. Dies gilt auch für die folgenden quantitativen Erweiterungen von Dickmeis, Nessel und van Wickeren:

Satz 2.30 (*UBP mit o -Ordnung, siehe [34]*) Seien X ein Banach-Raum, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende, positive Nullfolge, $\sigma(\delta) > 0$ für alle $\delta > 0$ und ω ein abstrakter Stetigkeitsmodul mit $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$. Weiter seien $\{S_\delta : \delta > 0\} \subset X^\sim$, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X^\sim$ sowie $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, so daß

$$\|g_n\|_X \leq C_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.27)$$

$$S_\delta g_n \leq C_2 \min \left\{ 1, \frac{\sigma(\delta)}{\varphi_n} \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \delta > 0, \quad (2.28)$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} T_n g_n > 0. \quad (2.29)$$

Dann existiert ein (Gegenbeispiel) $f_\omega \in X$ mit $(\delta \rightarrow 0+, n \rightarrow \infty)$

$$S_\delta f_\omega = \mathcal{O}(\omega(\sigma(\delta))), \quad (2.30)$$

$$T_n f_\omega \neq o(\omega(\varphi_n)). \quad (2.31)$$

Dabei bedeutet (2.31), daß ein $c > 0$ existiert mit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{T_n f_\omega}{\omega(\varphi_n)} > c > 0.$$

Wird dieser Satz benutzt, um die Schärfe einer Fehlerschranke zu zeigen, ist mit den T_n die Interpretation der Fehlerfunktionale verbunden. Die S_δ sind dann die Strukturfunktionale, also i.a. Stetigkeitsmoduln, gegen die die Fehlerfunktionale abgeschätzt werden. In einigen Anwendungen wird der Fehler gleichzeitig mit mehreren (Punkt-) Funktionalen gemessen. Hier erwartet man ein Gegenbeispiel, das gleichzeitig die Optimalität aller einzelnen Fehlerabschätzungen belegt. Dazu dient die folgende Version des Resonanzprinzips:

Satz 2.31 (*siehe [55], vgl. auch [29, 56]*) Seien X ein Banach-Raum, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende, positive Nullfolge, $\sigma(\delta) > 0$ für alle $\delta > 0$ und ω ein abstrakter Stetigkeitsmodul mit $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$. Weiter seien $\{S_\delta : \delta > 0\} \subset X^\sim$ und $\{T_{n,\nu} : n \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{B}_n\} \subset X^\sim$, wobei $(\mathbb{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge nichtleerer Indexmengen ist. Außerdem sei wieder eine Resonanzfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ gegeben, so daß

$$\|g_n\|_X \leq C_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.32)$$

$$S_\delta g_n \leq C_2 \min \left\{ 1, \frac{\sigma(\delta)}{\varphi_n} \right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \delta > 0, \quad (2.33)$$

$$\|T_{n,\nu}\|_{X^\sim} \leq C_{3,n} \quad \forall \nu \in \mathbb{B}_n, n \in \mathbb{N}, \quad (2.34)$$

$$T_{n,\nu} g_j \leq C_{4,\nu} C_{5,j} \varphi_n \quad \forall 1 \leq j \leq n-1, \nu \in \mathbb{B}_n, n \in \mathbb{N}, \quad (2.35)$$

$$T_{n,\nu} g_n \geq C_{6,\nu} > 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{B}_n. \quad (2.36)$$

Dann existiert eine streng monoton wachsende Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ und ein (gemeinsames Gegenbeispiel) $f_\omega \in X$, so daß $(\delta \rightarrow 0+, n \rightarrow \infty)$

$$S_\delta f_\omega = \mathcal{O}(\omega(\sigma(\delta))), \quad (2.37)$$

$$T_{n,\nu} f_\omega \neq o(\omega(\varphi_n)) \quad (2.38)$$

für jedes $\nu \in \mathbb{B} := \limsup_{k \rightarrow \infty} \mathbb{B}_{n_k} := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} \mathbb{B}_{n_j}$.

Dabei bedeutet (2.38), daß eine von ν abhängige Konstante c_ν existiert mit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{n,\nu} f_\omega}{\omega(\varphi_n)} \geq c_\nu > 0 \quad \forall \nu \in \mathbb{B}.$$

Wir haben später in den Anwendungen dieses Satzes die Situation, daß σ auf $(0, \infty)$ invertierbar ist und für alle $n \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{B}_n$ und $f \in X$ gilt:

$$T_{n,\nu} f \leq C_7 [S_{\sigma^{-1}(\varphi_n)} f + \varphi_n \|f\|_X]. \quad (2.39)$$

Diese Bedingung impliziert dann sofort (2.34) und zusammen mit (2.32) und (2.33) auch (2.35), denn:

$$\begin{aligned} \|T_{n,\nu}\|_{X^\sim} &\stackrel{(2.39)}{\leq} C_7 [\|S_{\sigma^{-1}(\varphi_n)}\|_{X^\sim} + \varphi_n] =: C_{3,n} \quad \forall \nu \in \mathbb{B}_n, \\ T_{n,\nu} g_j &\stackrel{(2.39), (2.33), (2.32)}{\leq} C_7 \left[C_2 \frac{\sigma(\sigma^{-1}(\varphi_n))}{\varphi_j} + C_1 \varphi_n \right] =: C_{5,j} \varphi_n \quad \forall j \in \mathbb{N}, \nu \in \mathbb{B}_n. \end{aligned}$$

Satz 2.31 ist recht allgemein formuliert. In den hier diskutierten Anwendungen kann durch eine geeignete Umbezeichnung die Folge $(\mathbb{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch eine feste Indexmenge \mathbb{B} ersetzt werden. In diesem Spezialfall geht Satz 2.31 in ein Resonanzprinzip aus [32] über. Andererseits werden die Mengen \mathbb{B}_n bzw. \mathbb{B} teilweise endlich bzw. abzählbar sein, so daß sich in dieser Situation Satz 2.31 auf ein Kondensationsprinzip aus [31] reduziert.

Der verbleibende Fall $\omega(\delta) = \delta$ muß in den Sätzen 2.30 und 2.31 ausgeschlossen werden. In den Anwendungen werden die Gegenbeispiele in diesem Fall explizit konstruiert. Unter den Voraussetzungen von Satz 2.30 erhält man aber zumindest noch die folgende \mathcal{O} -Aussage:

Satz 2.32 (siehe [34], vgl. Satz 2.30) Seien $X, \varphi_n, \sigma, S_\delta, T_n$ und g_n wie in Satz 2.30, so daß (2.27), (2.28) und (2.29) gelten. Dann existiert zu jeder Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Gegenbeispiel $f_\varepsilon \in X$ mit $(n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0+)$

$$S_\delta f_\varepsilon = \mathcal{O}(\sigma(\delta)), \quad (2.40)$$

$$T_n f_\varepsilon \neq \mathcal{O}(\varepsilon_n \varphi_n). \quad (2.41)$$

Schließlich geben wir die folgende Version des Umkehrsatzes von Butzer und Scherer an, die wir in Kapitel 4.1 zum Beweis eines Äquivalenzsatzes zwischen dem Finite-Elemente-Fehler und einem Stetigkeitsmodul benutzen.

Satz 2.33 (vgl. [18] und die dort zitierte Literatur) Sei X ein linearer, normierter Raum, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ eine Folge linearer Teilräume mit

$$U_n \subset U_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.42)$$

Weiter seien $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\gamma > 0$ und $\{S_\delta : \delta \in (0, 1]\} \subset X^\sim$, so daß $\|S_\delta\|_{X^\sim}$ unabhängig von δ beschränkt ist und eine Bernstein-Typ-Bedingung

$$S_{\delta^\gamma} g \leq C(\delta n)^\gamma \|g\|_X \quad \forall \delta > 0, g \in U_n, n \in \mathbb{N} \quad (2.43)$$

mit einer von δ , n und g unabhängigen Konstante C gilt. Weiter sei $\sigma : (0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ monoton wachsend, so daß $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \sigma(\delta) = 0$ und

$$\int_\delta^1 t^{-1-\gamma} \sigma(t) dt = \mathcal{O}(\delta^{-\gamma} \sigma(\delta)) \quad (\delta \rightarrow 0+). \quad (2.44)$$

Dann gilt für jedes $f \in X$ ($n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0+$):

$$E_n f := \inf_{g \in U_n} \|f - g\|_X = \mathcal{O}(\sigma(n^{-1})) \implies S_{\delta^\gamma} f = \mathcal{O}(\sigma(\delta)). \quad (2.45)$$

Umkehraussagen dieses Typs sind wohlbekannt. Allerdings werden gewöhnlich Bernstein-Typ-Bedingungen benutzt, bei denen die linke Seite durch eine Halbnorm bestimmt ist. Im Hinblick auf die Bernstein-Ungleichung von Oswald (siehe Lemma 4.2) ist es hier aber zweckmäßiger, allgemeine Glattheitsmaße zuzulassen. Dies führt im Beweis zu kleinen Modifikationen z.B. gegenüber der Darstellung in [18], weshalb wir ihn hier präsentieren. So können wir später auch die benutzte Technik mit einem anderen, konkret auf die Anwendung zugeschnittenen Ansatz vergleichen (siehe Kapitel 4.1).

Beweis Zu $\delta \in (0, 1]$ sei $k \in \mathbb{N}_0$ so gewählt, daß

$$2^{-k-1} < \delta \leq 2^{-k}. \quad (2.46)$$

Dazu seien $g_{2^j} \in U_{2^j}$ mit

$$\|f - g_{2^j}\|_X \leq E_{2^j} f + 2^{-j\gamma} (k+1)^{-1} \quad \forall j \in \mathbb{N}_0. \quad (2.47)$$

Zunächst zeigen wir, daß

$$S_{\delta^\gamma} g_{2^k} \leq C\delta^\gamma \left[\|f\|_X + \sum_{j=0}^k 2^{j\gamma} \|f - g_{2^j}\|_X \right]. \quad (2.48)$$

Da $g_{2^j} - g_{2^{j-1}} \in U_{2^j}$ (beachte (2.42)), ist

$$\begin{aligned} S_{\delta^\gamma} (g_{2^j} - g_{2^{j-1}}) &\stackrel{(2.43)}{\leq} C(\delta 2^j)^\gamma \|g_{2^j} - g_{2^{j-1}}\|_X \\ &\leq C(\delta 2^j)^\gamma [\|f - g_{2^j}\|_X + \|f - g_{2^{j-1}}\|_X], \end{aligned} \quad (2.49)$$

$$S_{\delta^\gamma} g_1 \stackrel{(2.43)}{\leq} C\delta^\gamma \|g_1\|_X \leq C\delta^\gamma [\|f\|_X + \|f - g_1\|_X]. \quad (2.50)$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} S_{\delta^\gamma} g_{2^k} &= S_{\delta^\gamma} \left(g_1 + \sum_{j=1}^k (g_{2^j} - g_{2^{j-1}}) \right) \leq S_{\delta^\gamma} g_1 + \sum_{j=1}^k S_{\delta^\gamma} (g_{2^j} - g_{2^{j-1}}) \\ &\stackrel{(2.49)}{\leq} \stackrel{(2.50)}{\leq} C(1 + 2^\gamma) \delta^\gamma \left[\|f\|_X + \sum_{j=0}^k 2^{j\gamma} \|f - g_{2^j}\|_X \right]. \end{aligned}$$

Also ist (2.48) gezeigt. Insgesamt folgt damit

$$\begin{aligned}
S_{\delta\gamma} f &\leq S_{\delta\gamma}(f - g_{2^k}) + S_{\delta\gamma} g_{2^k} \stackrel{\|S_{\delta\gamma}\|_{X \rightarrow X} \leq C_1}{\leq} C_1 \|f - g_{2^k}\|_X + S_{\delta\gamma} g_{2^k} \\
&\stackrel{(2.48)}{\leq} C_1 \|f - g_{2^k}\|_X + C_2 \delta^\gamma \left[\|f\|_X + \sum_{j=0}^k 2^{j\gamma} \|f - g_{2^j}\|_X \right] \\
&\stackrel{(2.47)}{\leq} C_1 E_{2^k} f + C_2 \delta^\gamma \left[\|f\|_X + \sum_{j=0}^k 2^{j\gamma} E_{2^j} f \right] + \\
&\quad + C_1 \underbrace{2^{-k\gamma}}_{\stackrel{(2.46)}{<} (2\delta)^\gamma} \underbrace{(k+1)^{-1}}_{\leq 1} + C_2 \delta^\gamma \underbrace{\sum_{j=0}^k 2^{j\gamma} 2^{-j\gamma} (k+1)^{-1}}_{=1} \\
&\leq C_1 E_{2^k} f + C_3 \delta^\gamma [\|f\|_X + 1] + C_2 \delta^\gamma \sum_{j=0}^k 2^{j\gamma} E_{2^j} f \\
&\leq C_4 \sigma(2^{-k}) + C_5 \delta^\gamma \left[\|f\|_X + 1 + \sum_{j=0}^k 2^{j\gamma} \sigma(2^{-j}) \right] \tag{2.51}
\end{aligned}$$

nach Voraussetzung. Mit (2.46) ist $\delta^\gamma 2^{k\gamma} > 1/2^\gamma$, so daß

$$\sigma(2^{-k}) = 2^\gamma \frac{1}{2^\gamma} \sigma(2^{-k}) \leq 2^\gamma \delta^\gamma 2^{k\gamma} \sigma(2^{-k}).$$

Damit läßt sich der erste Term in (2.51) gegen den Summanden für $j = k$ abschätzen, und es gilt

$$S_{\delta\gamma} f \leq C_{6,f} \delta^\gamma \left[1 + \sum_{j=0}^k 2^{j\gamma} \sigma(2^{-j}) \right] \leq C_{6,f} \left(\frac{1}{\sigma(1)} + 1 \right) \delta^\gamma \sum_{j=0}^k 2^{j\gamma} \sigma(2^{-j}),$$

da $1 = [2^{j\gamma} \sigma(2^{-j})] / \sigma(1)$ für $j = 0$. Um die Aussage $S_{\delta\gamma} f = \mathcal{O}(\sigma(\delta))$ zu erhalten, zeigen wir schließlich noch

$$\sum_{j=0}^{k(\delta)} 2^{j\gamma} \sigma(2^{-j}) = \mathcal{O}(\delta^{-\gamma} \sigma(\delta)) \quad (\delta \rightarrow 0+). \tag{2.52}$$

Wegen der Monotonie von σ ist

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^k 2^{j\gamma} \sigma(2^{-j}) &= \sum_{j=1}^k 2^{\gamma+1} [2^j - 2^{j-1}] 2^{j(\gamma-1)-\gamma} \sigma(2^{-j}) \leq 2^{\gamma+1} \sum_{j=1}^k \int_{2^{j-1}}^{2^j} t^{\gamma-1} \sigma\left(\frac{1}{t}\right) dt \\
&= 2^{\gamma+1} \int_1^{2^k} t^{\gamma-1} \sigma\left(\frac{1}{t}\right) dt = 2^{\gamma+1} \int_{2^{-k}}^1 t^{-\gamma-1} \sigma(t) dt \leq 2^{\gamma+1} \int_\delta^1 t^{-\gamma-1} \sigma(t) dt,
\end{aligned}$$

so daß (2.52) aus (2.44) folgt. Dabei ist zu beachten, daß auch der Summand zu $j = 0$ das richtige asymptotische Verhalten hat: In (2.44) ist die linke Seite größer als ein $c > 0$ für hinreichend kleine δ , so daß $c = \mathcal{O}(\delta^{-\gamma} \sigma(\delta))$. ■

2.5 Variationsaufgaben im Hilbert-Raum

Bei der Finite-Elemente-Methode wird eine Variationsaufgabe, die ursprünglich über einem unendlich-dimensionalen Hilbert-Raum formuliert ist, näherungsweise über einem nur endlich-dimensionalen Unterraum gelöst. Die Auswahl des Unterraums, des sogenannten Ansatzfunktionenraums, ist der eigentliche Kern der Methode und führt zu ihrem Namen. In diesem Abschnitt sollen zunächst die funktionalanalytischen Grundlagen für Variationsaufgaben dargestellt werden. Die Diskussion verschiedener Ansatzfunktionenräume geschieht in Kapitel 3. Im folgenden werden mit V und H reelle Hilbert-Räume bezeichnet. Die zugehörigen Skalarprodukte sind $(\cdot, \cdot)_V$ und $(\cdot, \cdot)_H$.

Definition 2.34 Sei $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform. a heißt

a) **symmetrisch**, falls $a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V$,

b) **beschränkt**, falls ein $C < \infty$ existiert mit

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V, \quad (2.53)$$

c) **V-elliptisch (koerziv)**, falls ein $c > 0$ existiert mit

$$a(u, u) \geq c \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V. \quad (2.54)$$

Wir diskutieren jetzt das folgende Variationsproblem, das auch schwaches Problem genannt wird.

Gegeben ist eine beschränkte und V -elliptische Bilinearform a und ein Funktional $f^* \in V^*$. Gesucht ist ein $u = u_{f^*} \in V$, so daß

$$a(u, v) = f^*(v) \quad \forall v \in V. \quad (2.55)$$

Aufgaben dieses Typs entstehen z.B. als Umformulierung einer Randwertaufgabe einer Differentialgleichung. Im Gegensatz zur Differentialgleichung ist aber hier die Frage nach der Lösbarkeit leicht zu beantworten:

Satz 2.35 (Lemma von Lax und Milgram, siehe z.B. [2, S.118]) Sei a eine beschränkte, V -elliptische Bilinearform. Dann existiert zu jedem $f^* \in V^*$ genau eine Lösung u von (2.55).

Das Lemma ist eine Folgerung aus dem Riesz-Darstellungssatz für Hilbert-Räume. Man beachte, daß keine Symmetrie von a gefordert ist. Ist a zusätzlich symmetrisch, also ein Skalarprodukt, so folgt die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung direkt mit dem Riesz-Satz. Außerdem ist die Lösung von (2.55) dann auch die eindeutige Lösung der folgenden Minimierungsaufgabe für das Funktional $J(v) := a(v, v)/2 - f^*(v)$ (siehe z.B. [21, S.25]):

Gesucht ist ein $u \in V$ mit $J(u) = \inf_{v \in V} J(v)$.

Im allgemeinen wird V unendlich-dimensional sein, so daß es schwierig ist, die Lösung von (2.55) explizit zu berechnen. Zur näherungsweisen Lösung von (2.55) betrachten wir nun einen endlich-dimensionalen Teilraum $V_h \subset V$ und lösen die folgende Diskretisierung von (2.55):

Gegeben seien die beschränkte und V -elliptische Bilinearform a und die Inhomogenität $f^* \in V^*$ der Aufgabe (2.55). Gesucht ist ein $u_h = u_{h,f^*} \in V_h$, so daß

$$a(u_h, v) = f^*(v) \quad \forall v \in V_h. \quad (2.56)$$

Der Teilraum $V_h \subset V$ ist selbst wieder ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_V$, so daß a auch V_h -elliptisch ist. Da außerdem $V^* \subset V_h^*$, ist $f^* \in V_h^*$. Ersetzen wir also in Satz 2.35 den Raum V durch V_h , so folgt, daß auch das diskrete Variationsproblem (2.56) eine eindeutige Lösung besitzt. Der Übergang von (2.55) zur diskreten Aufgabe (2.56) wird als **Ritz-Galerkin-Verfahren** bezeichnet.

Wir ändern nun unseren Blickwinkel. Bis jetzt haben wir den Ansatz verfolgt, zu einer Inhomogenität f^* Lösungen u und u_h von (2.55) und (2.56) zu suchen. Die Philosophie bei der Konstruktion von Gegenbeispielen (vgl. Kapitel 4) wird allerdings sein, von einem $u \in V$ auszugehen und dazu die Inhomogenität f^* anzugeben. Jedes $u \in V$ ist trivialerweise Lösung einer Aufgabe (2.55) mit der Inhomogenität $f^*(\cdot) := a(u, \cdot)$. Über die zugehörige diskrete Lösung u_h von (2.56) definieren wir die **Ritz-Projektion** $P_h : V \rightarrow V_h$ vermöge $P_h u = u_h$, also als eindeutige Lösung $P_h u \in V_h$ von

$$a(P_h u, v) = a(u, v), \text{ d.h., } a(u - P_h u, v) = 0 \quad \forall v \in V_h. \quad (2.57)$$

P_h ist offensichtlich ein linearer Operator, der wegen

$$c \|P_h u\|_V^2 \stackrel{(2.54)}{\leq} a(P_h u, P_h u) \stackrel{(2.57)}{=} a(u, P_h u) \stackrel{(2.53)}{\leq} C \|u\|_V \|P_h u\|_V,$$

d.h. $\|P_h u\|_V \leq \frac{C}{c} \|u\|_V$, beschränkt ist ($P_h \in [V, V_h]$). P_h wird auch als **elliptische Projektion** bezeichnet – Projektion, da nach (2.57) für alle $v \in V_h$ gilt: $P_h v = v$.

Werden in den folgenden Kapiteln schwache Probleme betrachtet, die aus Randwertproblemen von Differentialgleichungen durch partielle Integration entstehen, so haben die Inhomogenitäten f^* die spezielle Gestalt $(f, \cdot)_H$, wobei $H = L^2(\Omega)$ ist:

Lemma 2.36 Sei $V \subset_{st} H$, d.h. $\|v\|_H \leq C \|v\|_V$ für alle $v \in V$. Dann wird durch jedes $f \in H$ ein Funktional $f^* := (f, \cdot)_H \in V^* \subset V_h^*$ mit $\|f^*\|_{V^*} \leq C \|f\|_H$ erzeugt.

Beweis $|(f, v)_H| \leq \|f\|_H \|v\|_H \leq C \|f\|_H \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad \blacksquare$

Wir interessieren uns später nicht für allgemeine Variationsaufgaben, sondern nur für solche, die von Differentialgleichungen abstammen und damit spezielle Inhomogenitäten dieses Typs besitzen. In der Regel hat natürlich nicht jedes Funktional $f^* \in V^*$

eine Darstellung über ein $f \in H$. Damit kann aber auch nicht jedes $u \in V$ Lösung einer Aufgabe (2.55) mit von einem $f \in H$ erzeugter Inhomogenität sein. Ist allerdings u Lösung einer solchen Aufgabe, so kann dies einiges über zusätzliche Regularitätseigenschaften von u aussagen (vgl. Satz 3.1). Wir werden die Lösung der diskreten Aufgabe (2.56) zu einem vorgegebenen $u \in V$ generell mit $P_h u$ bezeichnen, während wir die Schreibweise u_h nur dann verwenden, wenn das Funktional f^* durch die Differentialgleichung erzeugt sein kann (also $f^* = (f, \cdot)_H$, vgl. Kapitel 3.1 und Seite 56). Damit beschreibt u_h stets eine (schwache) Näherungslösung des Randwertproblems einer Differentialgleichung, während mit $P_h u$ keine Interpretation verbunden ist und diese Schreibweise insbesondere für technische Zwischenaussagen benutzt wird.

Der Index h bei der Bezeichnung des endlich-dimensionalen Teilraums V_h deutet an, daß wir in den Anwendungen eine Familie von Teilräumen betrachten, so daß $\lim_{h \rightarrow 0+} \|u - P_h u\|_V = 0$, d.h., die $P_h u \in V_h$ approximieren $u \in V$. Den entscheidenden Beitrag zur Abschätzung des Fehlers $\|u - P_h u\|_V$ leistet der folgende Satz:

Satz 2.37 (Lemma von Céa, siehe z.B. [21, S.113]) Sei a eine beschränkte, V -elliptische Bilinearform mit Konstanten C und c wie in (2.53) und (2.54). Dann gilt für jedes $u \in V$ die Fehlerabschätzung:

$$\|u - P_h u\|_V \leq \frac{C}{c} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V. \quad (2.58)$$

Beweis Für beliebiges $v \in V_h$ gilt

$$a(u - P_h u, P_h u) \stackrel{(2.57)}{=} 0 \stackrel{(2.57)}{=} a(u - P_h u, v), \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} c\|u - P_h u\|_V^2 &\stackrel{(2.54)}{\leq} a(u - P_h u, u - P_h u) = a(u - P_h u, u) - a(u - P_h u, P_h u) \\ &\stackrel{(2.59)}{=} a(u - P_h u, u) - a(u - P_h u, v) = a(u - P_h u, u - v) \\ &\stackrel{(2.53)}{\leq} C\|u - P_h u\|_V \|u - v\|_V. \end{aligned}$$

Der Übergang zum Infimum bezüglich $v \in V_h$ liefert die Behauptung. ■

Ein wichtiger Vorteil von Finite-Elemente-Methoden gegenüber klassischen Differenzenverfahren ist die Stabilität, die hier unmittelbar durch den Ansatz gegeben ist:

Lemma 2.38 Sei a eine beschränkte, V -elliptische Bilinearform mit Konstanten C und c wie in (2.53) und (2.54). Sind $u_1, u_2 \in V$, so gilt für die zugehörigen Ritz-Projektionen $P_h u_1$ und $P_h u_2$:

$$\|P_h u_1 - P_h u_2\|_V \leq \frac{C}{c} \|u_1 - u_2\|_V. \quad (2.60)$$

Beweis Wir haben bereits gesehen, daß $\|P_h\|_{[V, V_h]} \leq C/c$. ■

Später werden wir $V = W_0^{1,2}(\Omega)$ setzen, den Fehler aber in einer L^2 -Norm messen. Dabei erhöht sich die Konvergenzordnung. Der beim Beweis benutzte Trick kann bereits in diesem allgemeinen Rahmen formuliert werden.

Satz 2.39 (*Lemma von Aubin und Nitsche, Nitsche-Trick, siehe z.B. [21, S.141]*)
 Seien $V \subset_{st} H$, $V_h \subset V$ wie oben und a eine beschränkte, V -elliptische Bilinearform.
 Dann gilt für jedes $u \in V$

$$|(u - P_h u, g)_H| \leq C \|u - P_h u\|_V \inf_{v \in V_h} \|w_g - v\|_V \quad \forall g \in H \quad (2.61)$$

$$\|u - P_h u\|_H \leq C \|u - P_h u\|_V \sup_{0 \neq g \in H} \left(\frac{1}{\|g\|_H} \inf_{v \in V_h} \|w_g - v\|_V \right), \quad (2.62)$$

wobei w_g die nach Satz 2.35 eindeutig bestimmte Lösung der dualen Aufgabe

$$a(v, w_g) = (v, g)_H \quad \forall v \in V \quad (2.63)$$

ist. Die Konstante C ist von u und V_h unabhängig.

Man beachte, daß Satz 2.35 tatsächlich auf (2.63) anwendbar ist. Denn mit a ist auch $\hat{a}(u, v) := a(v, u)$ eine beschränkte, koerzive Bilinearform, und wegen Lemma 2.36 ist außerdem $(\cdot, g)_H = (g, \cdot)_H \in V^*$. Die zusätzliche Regularität, die w_g als Lösung zu dieser speziellen Inhomogenität besitzt, wird in der Anwendung des Satzes zur Verbesserung der Konvergenzordnung führen.

Kapitel 3

Finite-Elemente-Methoden für elliptische Differentialgleichungen und globale Fehlerschranken

In diesem Kapitel werden a-priori-Fehlerschranken für die Finite-Elemente-Approximationen u_h der Lösungen u elliptischer Differentialgleichungen mit Dirichlet-Randbedingung angegeben. In der Regel werden in der Literatur solche Abschätzungen nur für glatte Lösungen u betrachtet. Wir greifen diese Ergebnisse auf und leiten daraus intermediäre Fehlerabschätzungen gegen Stetigkeitsmoduln her, die sich in Kapitel 4 als bestmöglich erweisen werden.

Wir beginnen mit einer kurzen Darstellung der Methode der Finiten Elemente und schließen die Diskussion des Fehlers $u - u_h$ in verschiedenen Normen an.

3.1 Das schwache Problem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet. Für Funktionen $u \in C^2(\Omega)$ betrachten wir den Differentialoperator L , definiert über

$$Lu(x) := - \sum_{i,j=1}^m a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) + \sum_{i=1}^m b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u(x) + d(x)u(x),$$

mit Koeffizientenfunktionen $a_{i,j}, b_i, d \in L^\infty(\Omega)$. Der Operator L heißt **gleichmäßig elliptisch** auf Ω , falls eine Konstante $\kappa > 0$ existiert, so daß für fast alle $x \in \Omega$ gilt (siehe [50, S.51]):

$$\sum_{i,j=1}^m a_{i,j}(x) y_i y_j \geq \kappa \sum_{j=1}^m y_j^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}^m. \quad (3.1)$$

Zur Klassifizierung des Differentialoperators wird also nur sein **Hauptteil**

$$- \sum_{i,j=1}^m a_{i,j}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

herangezogen. Elliptische Differentialgleichungen werden in der Regel als Randwertprobleme betrachtet. Wir diskutieren die folgende **Dirichlet-Aufgabe**:

Gesucht ist eine Funktion $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit

$$Lu(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad (3.2)$$

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (3.3)$$

Dabei sei jetzt L ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator der Form

$$Lu(x) := - \sum_{\substack{|\alpha| \leq 1 \\ |\beta|=1}} D^\beta [a_{\alpha,\beta}(x) D^\alpha u(x)] + \sum_{|\alpha| \leq 1} a_{\alpha,0}(x) D^\alpha u(x),$$

so daß L den Hauptteil $-\sum_{|\alpha|=|\beta|=1} a_{\alpha,\beta}(x) D^{\alpha+\beta}$ besitzt. (3.3) heißt eine homogene **Dirichlet-Randbedingung**. (Wir betrachten keine inhomogene Randbedingung, da die zugehörige Variationsaufgabe (vgl. (3.5)) i.a. auf eine homogene Randbedingung zurückgeführt werden kann (siehe [51, S.138]).) Die Koeffizienten $a_{\alpha,\beta}$, $\partial\Omega$ und die Inhomogenität f seien genügend glatt, um die folgenden Rechnungen durchzuführen.

Wir überführen nun die Aufgabe (3.2), (3.3) in eine schwache Form. Dazu multiplizieren wir beide Seiten von (3.2) mit einer Testfunktion $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und integrieren über Ω :

$$\int_{\Omega} (Lu(x))v(x)dx = \int_{\Omega} f(x)v(x)dx.$$

Die linke Seite läßt sich mittels der partiellen Integration (2.7) auch über eine Bilinearform darstellen:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (Lu(x))v(x)dx \\ &= \sum_{\substack{|\alpha| \leq 1 \\ |\beta|=1}} \int_{\Omega} a_{\alpha,\beta}(x) (D^\alpha u(x)) (D^\beta v(x)) dx + \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} a_{\alpha,0}(x) (D^\alpha u(x)) v(x) dx \\ &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} \int_{\Omega} a_{\alpha,\beta}(x) (D^\alpha u(x)) (D^\beta v(x)) dx =: a(u, v). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Damit ist das folgende schwache Problem motiviert, das Ausgangspunkt für die Finite-Elemente-Methode ist (vgl. (2.55)):

Gegeben sei die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ aus (3.4). Zu $f \in L^2(\Omega)$ ist ein $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gesucht mit

$$a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega). \quad (3.5)$$

Da wir ab jetzt nur noch (3.5) und nicht mehr (3.2) betrachten, müssen die Koeffizienten $a_{\alpha,\beta}$ nicht differenzierbar sein, wir verlangen lediglich $a_{\alpha,\beta} \in L^\infty(\Omega)$, so daß $a(\cdot, \cdot)$ über $W_0^{1,2}(\Omega)$ beschränkt ist. Falls $|\alpha| = |\beta| = 1$, sei $a_{\alpha,\beta}$ im Hinblick auf Regularitätsfragen (vgl. Satz 3.1) zusätzlich Lipschitz-stetig (Definition 2.1). Schließlich sollen die Koeffizienten auch noch gewährleisten, daß $a(\cdot, \cdot)$ koerziv ist (vgl. (2.54)). Falls $a_{\alpha,\beta} = 0$ für $|\alpha| + |\beta| < 2$, folgt dies bereits aus der Forderung, daß der Differentialoperator L gleichmäßig elliptisch ist ($v \in W_0^{1,2}(\Omega)$):

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} \int_{\Omega} a_{\alpha,\beta}(x) (D^\alpha v(x)) (D^\beta v(x)) dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^m a_{e_i, e_j}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} v(x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} v(x) \right) dx \\ &\stackrel{(3.1)}{\geq} \kappa \int_{\Omega} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_j} v(x) \right)^2 dx = \kappa |v|_{1,2,\Omega}^2 \stackrel{\text{Lemma 2.8d}}{\geq} c\kappa \|v\|_{1,2,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Ohne zusätzliche Einschränkungen an die Koeffizienten läßt sich dagegen aus der Elliptizität von L nur eine abgeschwächte Form der Koerzivität zeigen (Gårding-Ungleichung, siehe z.B. [9, S.136]).

Nach Voraussetzung ist also $a(\cdot, \cdot)$ eine beschränkte, $W_0^{1,2}(\Omega)$ -elliptische Bilinearform und $(f, \cdot)_{L^2(\Omega)} \in (W_0^{1,2}(\Omega))^*$ nach Lemma 2.36. Damit existiert nach Satz 2.35 eine eindeutige Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ der Aufgabe (3.5). Während bei dem Randwertproblem (3.2), (3.3) zunächst nur nach Lösungen in $C^2(\bar{\Omega})$ gesucht wurde, ist durch die schwache Formulierung die Menge der Kandidaten größer geworden, so daß die Existenz einer Lösung gesichert ist. Natürlich sind, wegen der Motivation zu (3.5), die klassischen Lösungen von (3.2), (3.3) auch schwache Lösungen im Sinne von (3.5). Schließlich beachte man noch, daß sich die Dirichlet-Randbedingung (3.3) beim schwachen Problem in der Wahl des Raums $W_0^{1,2}(\Omega)$ niederschlägt.

Bedingt durch die einfache Struktur von Ω (wir verlangen zusätzlich, daß Ω konvex ist), die Glattheit der Koeffizienten, aber vor allem wegen der speziellen Inhomogenität $(f, \cdot)_{L^2(\Omega)}$, die hier das allgemeine Funktional f^* (vgl. (2.55)) ersetzt, gilt die folgende Regularitätsaussage:

Satz 3.1 (siehe [51, S.200, Satz 9.1.22]) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes, konvexes Gebiet und a wie in (3.4) mit den oben festgelegten Voraussetzungen an die Koeffizienten ($a_{\alpha,\beta} \in L^\infty(\Omega)$ und Lipschitz-stetig, falls $|\alpha| + |\beta| = 1$). Dann gilt für die Lösung u von (3.5)

$$u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega), \quad (3.6)$$

und es existiert eine Konstante C , unabhängig von f und u , so daß

$$|u|_{2,2,\Omega} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.7)$$

Dieses Ergebnis ist für die angestrebten Fehlerschranken fundamental.

3.2 Die Finite-Elemente-Methode

Wir wollen, statt die Aufgabe (3.5) über $W_0^{1,2}(\Omega)$ exakt zu lösen, mit Hilfe endlich-dimensionaler Räume $V_h \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ Näherungslösungen gewinnen (vgl. (2.56)). Diese Ansatzfunktionenräume V_h bestehen bei der Finite-Elemente-Methode i.a. aus Funktionen, die stückweise als Polynome definiert sind (Splines), so daß es eine (einfache) Basis gibt, deren Elemente weitgehend disjunkten Träger besitzen. Dies vereinfacht das Lösen des bei der Berechnung entstehenden Gleichungssystems (3.50) und ist ein wesentlicher Grund für den praktischen Erfolg der Methode. Umfassende Einführungen in die mathematische Theorie der Finite-Elemente-Verfahren sind z.B. [3, 6, 9, 21, 45, 51, 60, 64, 75, 89].

3.2.1 Finite Elemente

Zur Definition von V_h wird das Gebiet Ω trianguliert, d.h., in einfachere Mengen K , den Finiten Elementen, aufgeteilt (vgl. Definitionen 3.2 und 3.9 unten). Die Ansatzfunktionen sind Polynome über den Mengen K , die damit die Bausteine von V_h sind. Wir beginnen unsere kurze Zusammenfassung der Finite-Elemente-Methode mit den Finiten Elementen, deren Definition in dieser Form auf Ciarlet zurückgeht (siehe z.B. [21, S.94]):

Definition 3.2 *Ein Finites Element im \mathbb{R}^m ist ein Tripel (K, V_K, Σ) , wobei:*

- a) $K \subset \mathbb{R}^m$ ist abgeschlossen (und beschränkt), $\text{int } K \neq \emptyset$, und K besitzt einen Lipschitz-Rand (siehe Definition 2.3b)).
- b) V_K ist ein linearer Raum reellwertiger Funktionen über K der endlichen Dimension N .
- c) Σ ist eine Basis des algebraischen Dualraums von V_K .

Die Menge K wird ebenfalls bereits als Finites Element bezeichnet. Durch Σ ist automatisch auch eine (zu Σ duale) Basis von V_K festgelegt, die bei der konkreten Realisierung der Methode wichtig ist. Die Elemente von Σ heißen **Freiheitsgrade**.

Wir werden in dieser Arbeit nur relativ einfache, aber sehr wichtige Lagrange-Elemente berücksichtigen, die jetzt angegeben werden.

Simplexe

Definition 3.3 (siehe [21, S.66]) *Ein m -Simplex $K \subset \mathbb{R}^m$ ist die konvexe Hülle von $m + 1$ Punkten $P_j = (p_{j,1}, \dots, p_{j,m}) \in \mathbb{R}^m$, die in keiner Hyperebene des \mathbb{R}^m gemeinsam*

liegen, d.h., die die Bedingung

$$\det \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,m} & 1 \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,m} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ p_{m+1,1} & p_{m+1,2} & \cdots & p_{m+1,m} & 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

erfüllen. K besitzt also eine Darstellung

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j P_j, 0 \leq \lambda_j \leq 1, \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j = 1 \right\}. \quad (3.8)$$

Ein **n -Seitensimplex** von K , $0 \leq n < m$, ist die konvexe Hülle von $n + 1$ Eckpunkten P_j von K . Wir bezeichnen einen 1-Seitensimplex auch als **Kante** und einen $m - 1$ -Seitensimplex auch kurz als **Seite**.

Im \mathbb{R}^2 ist ein 2-Simplex gerade ein Dreieck, die Begriffe Seite und Kante fallen hier zusammen.

Zu der Menge K sei $V_K := \mathcal{P}_r(K) := \mathcal{P}_r|_K$ für ein $r \in \mathbb{N}$ (vgl. (2.1)). Für die Dimension von V_K gilt:

$$N = \dim \mathcal{P}_r = \binom{m+r}{r}. \quad (3.9)$$

Denn da $\text{int } K \neq \emptyset$ nach Definition 3.3, ist $\dim \mathcal{P}_r(K) = \dim \mathcal{P}_r$. Da außerdem \mathcal{P}_r die Basis $\{x^\alpha : |\alpha| \leq r\}$ hat, gilt mit der Anzahlformel für Kombinationen mit Wiederholung:

$$\dim \mathcal{P}_r = \sum_{j=0}^r |\{\alpha \in \mathbb{N}_0^m : |\alpha| = j\}| = \sum_{j=0}^r \binom{m+j-1}{j} = \binom{m+r}{r}.$$

Folgen wir der Definition 3.2, so müssen wir noch eine Basis Σ von $\mathcal{P}_r(K)^*$ festlegen. Dabei erhalten wir gleichzeitig einen Interpolationsoperator, der beim Beweis von Fehlerschranken sehr hilfreich ist.

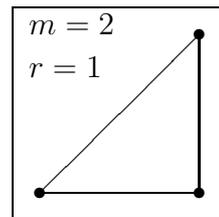
Satz 3.4 (vgl. [21, S.70] und die dort zitierte Literatur) Sei $r \in \mathbb{N}$ und $K \subset \mathbb{R}^m$ ein m -Simplex, definiert über die Punkte P_1, \dots, P_{m+1} . Weiter sei (geschrieben in baryzentrischen Koordinaten λ_j)

$$\mathcal{M}_K := \mathcal{M}_{K,r} := \left\{ x \in \mathbb{R}^m : x = \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j P_j \text{ mit } \sum_{j=1}^{m+1} \lambda_j = 1 \text{ und } \lambda_j \in \left\{ 0, \frac{1}{r}, \dots, \frac{r-1}{r}, 1 \right\}, 1 \leq j \leq m+1 \right\}. \quad (3.10)$$

Dann existiert zu auf $\mathcal{M}_{K,r} \subset K$ vorgegebenen reellen Funktionswerten genau ein Polynom $v \in \mathcal{P}_r$, das diese dort annimmt. Insbesondere ist $|\mathcal{M}_{K,r}| = \dim \mathcal{P}_r = \binom{m+r}{r}$.

Nach Satz 3.4, der die Eindeutigkeit sichert, sind ($1 \leq p < \infty$)

$$\left[\sum_{x \in \mathcal{M}_{K,r}} |v(x)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{und} \quad \max_{x \in \mathcal{M}_{K,r}} |v(x)|$$

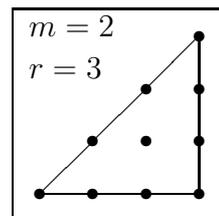


Normen auf $\mathcal{P}_r(K)$. Da $\mathcal{P}_r(K)$ endlich-dimensional ist und über endlich-dimensionalen Räumen alle Normen äquivalent sind, existieren Konstanten $0 < c_{K,r,p}$ und $C_{K,r,p} < \infty$, so daß für alle $v \in \mathcal{P}_r(K)$ gilt:

$$\begin{aligned} c_{K,r,p} \|v\|_{L^p(K)} &\leq \left[\sum_{x \in \mathcal{M}_{K,r}} |v(x)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq C_{K,r,p} \|v\|_{L^p(K)} \\ c_{K,r,\infty} \|v\|_{C(K)} &\leq \max_{x \in \mathcal{M}_{K,r}} |v(x)| \leq \|v\|_{C(K)}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Um später eine kanonische Basis des Ansatzfunktionenraums V_h und einen globalen Interpolationsoperator definieren zu können, ist das folgende Lemma hilfreich:

Lemma 3.5 *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.4 seien $v_1, v_2 \in \mathcal{P}_r$ und K_S ein n -Seitensimplex von K , $0 \leq n < m$. Falls $v_1(x) = v_2(x)$ für alle $x \in K_S \cap \mathcal{M}_{K,r}$, so ist $v_1(x) = v_2(x)$ für alle $x \in K_S$.*



Beweis-Skizze Ist $n = 0$, so besteht K_S aus einem Punkt der Menge $\mathcal{M}_{K,r}$, und die Aussage ist trivial. Sonst fasse $v_1|_{K_S}, v_2|_{K_S}$ als Elemente von \mathcal{P}_r über dem \mathbb{R}^n auf (geeignete Variablentransformation). Dann folgt das Lemma aus Satz 3.4, angewandt im \mathbb{R}^n . ■

Nach Satz 3.4 ist die Menge der Punktfunktionale $\Sigma := \{\sigma_x : x \in \mathcal{M}_{K,r}\}$, $\sigma_x v = v(x)$, eine Basis von $\mathcal{P}_r(K)^*$, und das Finite Element $(K, \mathcal{P}_r(K), \Sigma)$ heißt **m -Simplex vom Grad r** .

Der weiter unten definierte globale Interpolationsoperator für V_h setzt sich aus **lokalen Interpolationsoperatoren** $\Pi_{K,r}$ für die einzelnen Elemente der Triangulierung zusammen: Zu einem m -Simplex K und $r \in \mathbb{N}$ sei

$$\Pi_{K,r} : C(K) \rightarrow \mathcal{P}_r(K)$$

die Projektion, die jedem $v \in C(K)$ das nach Satz 3.4 eindeutig bestimmte Polynom $\Pi_{K,r}v \in \mathcal{P}_r(K)$ zuordnet mit $\Pi_{K,r}v \equiv v$ auf $\mathcal{M}_{K,r}$.

Rechtecke

Definition 3.6 (siehe [21, S.76], vgl. Definition 3.3) Ein **m -Rechteck** $K \subset \mathbb{R}^m$ ist eine Menge der Form

$$K = \prod_{j=1}^m [a_j, b_j] = \{x \in \mathbb{R}^m : a_j \leq x_j \leq b_j, 1 \leq j \leq m\},$$

wobei $a_j < b_j$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq m$. Seien $J \subset \{1, \dots, m\}$ mit $0 < |J| \leq m$ und $c_j \in \{a_j, b_j\}$. Ein **Seitenrechteck** von K ist eine Menge der Form

$$\{x \in K : x_j = c_j, j \in J\}.$$

Ein Seitenrechteck zu $|J| = m - 1$ heißt auch **Kante**, ein Seitenrechteck zu $|J| = 1$ auch **Seite**.

Der zugehörige Raum V_K bestehe wieder aus Polynomen, allerdings setzen wir jetzt $V_K = \mathcal{P}^r(K) = \mathcal{P}^r|_K$ (vgl. (2.1)). Da \mathcal{P}^r die Basis $\{x^\alpha : 0 \leq \alpha_j \leq r, 1 \leq j \leq m\}$ besitzt, ist die Dimension

$$N = \dim \mathcal{P}^r(K) = \dim \mathcal{P}^r = (r + 1)^m$$

größer als die entsprechende bei den m -Simplexen. Entscheidend für die Fehlerabschätzung gegen radiale Stetigkeitsmoduln ist, daß $\mathcal{P}_r \subset \mathcal{P}^r$. Die Produktstruktur der Rechtecke drückt sich hier in einer entsprechenden Struktur des Raums V_K aus, weshalb man auch von Tensor-Produkt-Elementen spricht. Nach Definition 3.2 müssen wir jetzt noch eine Basis Σ von $\mathcal{P}^r(K)^*$ festlegen:

Satz 3.7 (siehe [21, S.75], vgl. Satz 3.4) Seien $r \in \mathbb{N}$ und $K \subset \mathbb{R}^m$ ein m -Rechteck, $K = \prod_{j=1}^m [a_j, b_j]$. Weiter sei jetzt

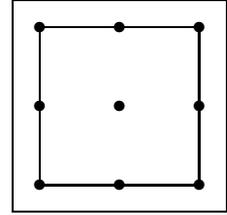
$$\mathcal{M}_K := \mathcal{M}_{K,r} := \left\{ \left(a_1 + i_1 \frac{b_1 - a_1}{r}, a_2 + i_2 \frac{b_2 - a_2}{r}, \dots, a_m + i_m \frac{b_m - a_m}{r} \right) : \right. \\ \left. i_j \in \{0, \dots, r\}, 1 \leq j \leq m \right\}.$$

Dann existiert zu auf $\mathcal{M}_{K,r} \subset K$ vorgegebenen reellen Funktionswerten genau ein Polynom $v \in \mathcal{P}^r$, das diese dort annimmt.

Wir unterscheiden in der Notation (z.B. $\mathcal{M}_{K,r}$) nicht zwischen den verschiedenen Finite-Element-Typen, da die Bedeutung aus dem Zusammenhang immer klar sein wird. Natürlich gilt auch für die Seitenrechtecke eines m -Rechtecks die entsprechende Aussage zu Lemma 3.5, und wir haben eine Normäquivalenz (3.11).

Nach Satz 3.7 ist auch jetzt $\Sigma := \{\sigma_x : x \in \mathcal{M}_{K,r}\}$, $\sigma_x v = v(x)$, eine Basis von $\mathcal{P}^r(K)^*$, und das Finite Element $(K, \mathcal{P}^r(K), \Sigma)$ heißt **m -Rechteck vom Grad r** .

Der lokale Interpolationsoperator $\Pi_{K,r} : C(K) \rightarrow \mathcal{P}^r(K)$ sei schließlich für die m -Rechtecke analog zu den m -Simplexten festgelegt, d.h., $\Pi_{K,r}$ ordnet jedem $v \in C(K)$ das nach Satz 3.7 eindeutig festgelegte Polynom $\Pi_{K,r}v \in \mathcal{P}^r(K)$ zu, das in den Punkten von $\mathcal{M}_{K,r}$ mit v übereinstimmt.



Ein Serendipity-Element

Die Dimension der Räume V_K kann bei den Rechteck-Elementen noch gesenkt werden, ohne daß sich Einbußen bei der Konvergenzordnung ergeben oder die angestrebte Inklusion $V_h \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ (siehe unten) verletzt wird. Dies führt zu den in der Praxis wichtigen Serendipity-Elementen. Wir betrachten als Beispiel nur die übersichtliche Situation $m = 2$, $r = 2$. Die Analysis komplizierterer Elemente ist völlig analog.

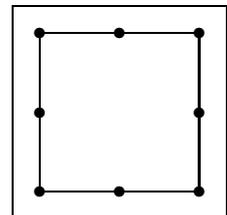
Auf dem 2-Rechteck K sei jetzt

$$V_K := \mathcal{P}^{\text{Ser}}(K) := \left\{ v : K \rightarrow \mathbb{R} : v(x) = \sum_{\substack{0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 2 \\ \alpha \neq (2,2)}} C_\alpha x^\alpha, C_\alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Damit ist also $V_K = \mathcal{P}_\Lambda(K) := \mathcal{P}_\Lambda|_K$ für $\Lambda = \{\alpha : 0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 2, \alpha \neq (2,2)\}$ und $\mathcal{P}_2(K) \subset V_K \subset \mathcal{P}^2(K)$ (vgl. (2.14)). Statt der Dimension 9 beim entsprechenden 2-Rechteck vom Grad 2 ist also jetzt $N = \dim V_K = 8$.

Satz 3.8 (siehe [9, S.115]) Sei für $m = 2$ die Menge $\mathcal{M}_{K,2}$ wie in Satz 3.7, jedoch ohne den Punkt $((a_1 + b_1)/2, (a_2 + b_2)/2)$ (vgl. Skizze). Dann existiert zu auf $\mathcal{M}_{K,2}$ vorgegebenen reellen Funktionswerten genau ein Polynom $v \in V_K$, das diese dort annimmt.

Entsprechend gelten auch hier wieder zu Lemma 3.5 und (3.11) analoge Aussagen. Über die Punkte aus $\mathcal{M}_{k,2}$ läßt sich auch hier wieder analog zu den bereits eingeführten Elementen eine Basis Σ und ein lokaler Interpolationsoperator $\Pi_{K,r}$ definieren. (K, V_K, Σ) heißt **Serendipity-Element vom Grad 2**.



3.2.2 Triangulierungen und Ansatzfunktionen

Die Räume V_K sollen nun benutzt werden, um die Ansatzfunktionenräume V_h zu definieren. Dazu wird zunächst der Definitionsbereich Ω in einzelne Finite Elemente zerlegt:

Definition 3.9 (siehe [21, S.61], vgl. [9, S.77]) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ beschränkt. Eine endliche Menge $\mathcal{T} = \{K_1, \dots, K_n\}$ von m -Simplexten bzw. m -Rechtecken K_j (also den Mengen,

die in Kapitel 3.2.1 bei der Definition der Finiten Elemente benutzt werden) heißt **Triangulierung von Ω** , falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

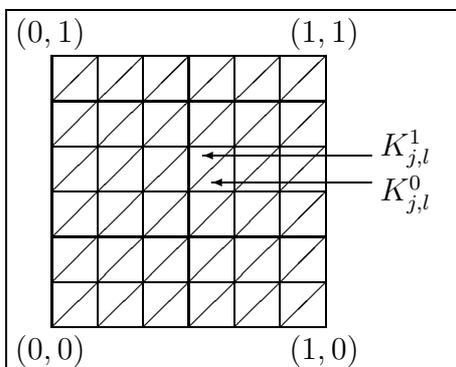
$$a) \bigcup_{j=1}^n K_j = \overline{\Omega}.$$

$$b) (\text{int } K_i) \cap (\text{int } K_j) = \emptyset, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad i \neq j.$$

c) Falls $K_i \cap K_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, so ist $K_i \cap K_j$ ein gemeinsamer Seitensimplex bzw. ein gemeinsames Seitenrechteck von K_i und K_j .

Die Bedingung c) bedeutet also insbesondere: Jede Seite eines $K_j \in \mathcal{T}$ ist entweder auch Seite eines anderen Elements $K_i \in \mathcal{T}$, $i \neq j$, oder sie gehört komplett zu $\partial\Omega$. Natürlich kann nicht jede Menge so trianguliert werden. Wir nennen ein LG-Gebiet, für das eine Triangulierung durch Simplexe existiert, **polygonal**. Ist eine offene Menge Ω durch Simplexe triangulierbar, so ist sie beschränkt und erfüllt die Kegelbedingung (vgl. Kapitel 2.1.2). Allerdings folgt nicht, daß Ω einen Lipschitz-Rand hat (siehe Beispiel in Kapitel 2.1.2), da sich z.B. der Rand noch in einigen Punkten berühren kann. Daher setzen wir den Lipschitz-Rand (LG-Gebiet) bei Verwendung des Begriffs „polygonal“ implizit voraus. Werden für die Triangulierung m -Rechtecke verwendet, muß die Menge insbesondere als endliche Vereinigung dieser Mengen darstellbar sein. Konvexe Gebiete können in dieser Situation also nur bereits selbst m -Rechtecke sein.

Im folgenden werden wir ausschließlich polygonale Definitionsbereiche betrachten, um die Analysis übersichtlich zu gestalten. In praktischen Anwendungen lassen sich die auftretenden Gebiete allerdings oft nicht durch endlich viele Simplexe komplett ausschöpfen. Hier werden dann Triangulierungen mit isoparametrischen Elementen durchgeführt, die den Rand genügend gut approximieren (vgl. z.B. [21, S.227ff]). Die Beschränkung auf polygonale Mengen führt dazu, daß wir Ecken in Kauf nehmen müssen, die gegebenenfalls zu Einschränkungen der Regularität der Lösungen u von (3.5) führen (vgl. Kapitel 3.5).



Wir betrachten ein einfaches Beispiel, das später noch eine wichtige Rolle spielen wird: Zu $h = 1/n$ ist

$$\mathcal{T}_h := \{K_{j,l}^i : 1 \leq j, l \leq n, i = 0, 1\} \quad (3.12)$$

eine Triangulierung der Menge $\Omega = (0, 1)^2$ (siehe Skizze). Dabei ist $K_{j,l}^0$ das Dreieck mit den Ecken $((j-1)h, (l-1)h)$, $(jh, (l-1)h)$ und (jh, lh) und $K_{j,l}^1$ das Dreieck mit den Ecken $((j-1)h, lh)$, (jh, lh) und $((j-1)h, (l-1)h)$.

Sei jetzt $\{\mathcal{T}_h : h \in (0, 1]\}$ eine Familie von Triangulierungen von Ω mit (vgl. [9, S.106])

$$\max\{\text{diam } K : K \in \mathcal{T}_h\} \leq h \text{ diam } \Omega \quad \forall 0 < h \leq 1. \quad (3.13)$$

Dabei ist $\text{diam } K := \sup\{|x - y| : x, y \in K\}$. Insbesondere gilt dann also:

$$\text{meas } K := \int_K 1 dx \leq C_{\Omega, m} h^m. \quad (3.14)$$

Zusätzlich zu (3.13) existiere ein $\kappa > 0$, so daß

$$\min\{\rho(K) : K \in \mathcal{T}_h\} \geq \kappa h \text{diam } \Omega \quad \forall 0 < h \leq 1, \quad (3.15)$$

wobei $\rho(K) := \sup\{\text{diam } B : B \text{ ist eine in } K \text{ enthaltene Kugel}\}$. Also ist insbesondere

$$\text{meas } K \geq c_{\Omega, m} h^m. \quad (3.16)$$

Eine Familie $\{\mathcal{T}_h\}$, die (3.13) und (3.15) erfüllt, heißt **gleichmäßig-regulär (quasi-uniform)** und ist insbesondere **regulär** (siehe [21, S.128]), d.h., es existiert eine Konstante C , so daß

$$\frac{\text{diam } K}{\rho(K)} \leq C \quad \forall K \in \bigcup_{0 < h \leq 1} \mathcal{T}_h,$$

wobei hier $C = 1/\kappa$ ist. Wir untersuchen fast ausschließlich gleichmäßig reguläre Familien von Triangulierungen wie z.B.

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_h : \mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{1/n} \text{ aus (3.12),} & \quad \text{falls } 1/n \leq h < 1/(n-1), n > 1, h \in (0, 1), \\ & \quad \text{bzw. } n = 1, \text{ falls } h = 1\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

der Menge $(0, 1)^2$. Denn für $n > 1$ und $K \in \mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{1/n}$, $\frac{1}{n} \leq h < \frac{1}{n-1}$, gilt

$$\text{diam } K = \frac{\sqrt{2}}{n} = \frac{\text{diam } \Omega}{n} \leq h \text{diam } \Omega,$$

d.h., (3.13) ist erfüllt. Außerdem gilt (3.15), da

$$\rho(K) \geq \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{3(n-1)} > \frac{h}{3} = \frac{1}{3\sqrt{2}} h \text{diam } \Omega.$$

Für \mathcal{T}_h zu $h = 1$ sind (3.13) und (3.15) ohnehin erfüllt. An diesem Beispiel wird außerdem deutlich, daß es natürlich ist, für h den Parameterbereich $(0, 1]$ auf eine Teilmenge mit Häufungspunkt 0 einzuschränken, hier z.B. auf $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Wegen der einfacheren Notation benutzen wir aber auch weiterhin den Parameterbereich $(0, 1]$. Betrachten wir die Triangulierungen \mathcal{T}_h zu $n = 2^j$, also zu $h = 2^{-j}$, $j \in \mathbb{N}_0$, aus (3.12), so entstehen diese durch sukzessive Verfeinerung der einzelnen Elemente in jeweils vier neue (siehe Abbildung 3.1). Wählen wir statt (3.17) die Familie

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_h : \mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{2^{-j}} \text{ aus (3.12),} & \quad \text{falls } 2^{-j} \leq h < 2^{-j+1}, j \in \mathbb{N}, h \in (0, 1), \\ & \quad \text{bzw. } \mathcal{T}_h = \mathcal{T}_1, \text{ falls } h = 1\}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

so ist diese ebenfalls gleichmäßig regulär. Die Eigenschaft wäre allerdings verletzt, wenn nicht jedes Dreieck verfeinert würde sondern nur die, bei denen eine Singularität der Lösung der Differentialgleichung erwartet wird.

Wir diskutieren nun elementare Eigenschaften gleichmäßig regulärer Triangulierungen:

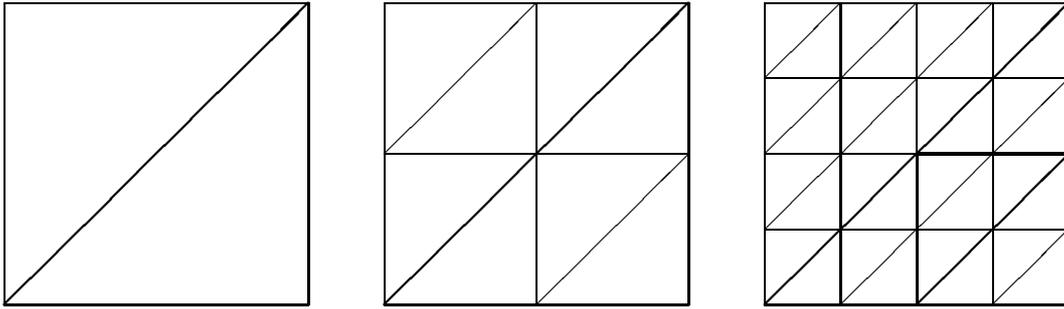


Abbildung 3.1: Sukzessive verfeinerte Triangulierungen

Lemma 3.10 Sei $\{\mathcal{T}_h : h \in (0, 1]\}$ eine gleichmäßig reguläre Familie von Triangulierungen der Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, d.h., (3.13) und (3.15) sind erfüllt. Weiter sei $0 < C_0 < \infty$ eine (von $h \in (0, 1]$ unabhängige) Konstante. Dann existiert eine weitere von h unabhängige Konstante $M \in \mathbb{N}$, so daß es zu jedem $h \in (0, 1]$ und jeder Menge $E_h \subset \Omega$ mit $\text{diam } E_h < C_0 h$ höchstens M verschiedene $K \in \mathcal{T}_h$ gibt mit $K \cap E_h \neq \emptyset$.

Beweis Da $\text{diam } E_h < C_0 h$, ist E_h in einer Kugel $S(C_0 h, x)$ für ein $x \in \Omega$ enthalten. Nach (3.13) ist $\text{diam } K \leq h \text{diam } \Omega$ für $K \in \mathcal{T}_h$, so daß $K \cap S(C_0 h, x) \neq \emptyset$ nur für solche K gelten kann, die ganz in $S(C_0 h + 2h \text{diam } \Omega, x)$ liegen. Da nach (3.16) für $K \in \mathcal{T}_h$ gilt: $\text{meas } K > c_{\Omega, m} h^m$, und da nach Definition 3.9 gilt $\text{int } K_i \cap \text{int } K_j = \emptyset$, $K_i \neq K_j \in \mathcal{T}_h$, können in $S(C_0 h + 2h \text{diam } \Omega, x)$ höchstens

$$\frac{\text{meas } S(h[C_0 + 2 \text{diam } \Omega], x)}{c_{\Omega, m} h^m} = \frac{C_{\Omega, m} h^m}{c_{\Omega, m} h^m} \leq M$$

verschiedene $K \in \mathcal{T}_h$ liegen. Dabei ist offensichtlich $M \in \mathbb{N}$ unabhängig von h und E_h . Also ist auch $K \cap E_h \neq \emptyset$ für höchstens M verschiedene $K \in \mathcal{T}_h$. ■

Wählen wir in Lemma 3.10 speziell $E_h = \{x\}$ für ein $x \in \Omega$, so ist $0 = \text{meas } E_h < C_0 h$, und es gilt:

Folgerung 3.11 Sei $\{\mathcal{T}_h : h \in (0, 1]\}$ eine gleichmäßig reguläre Familie von Triangulierungen der Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$. Dann existiert eine Konstante $M \in \mathbb{N}$, so daß es zu jedem $x \in \Omega$ und jedem $h \in (0, 1]$ höchstens M verschiedene $K \in \mathcal{T}_h$ mit $x \in K$ gibt.

Dies bedeutet also, daß an einer Stelle der Menge Ω höchstens M Elemente jeder Triangulierung \mathcal{T}_h zusammenstoßen können.

Zu einer Familie von Triangulierungen $\{\mathcal{T}_h\}$ definieren wir nun die **Ansatzfunktionenräume**

$$V_h := V_h(r) := \{v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R} : v|_K \in V_K \forall K \in \mathcal{T}_h\} \cap C_0(\bar{\Omega}), \quad (3.19)$$

wobei (vgl. Kapitel 3.2.1)

$$V_K = \begin{cases} \mathcal{P}_r(K), & \text{falls } m\text{-Simplexe vom Grad } r \text{ benutzt werden.} \\ \mathcal{P}^r(K), & \text{falls } m\text{-Rechtecke vom Grad } r \text{ benutzt werden.} \\ \mathcal{P}^{Ser}(K), & \text{falls das Serendipity-Element benutzt wird.} \end{cases}$$

Dabei gehen wir davon aus, daß nur genau ein Finite-Element-Typ verwendet wird und setzen beim Serendipity-Element $r = 2$, um später einheitliche Fehlerschranken zu bekommen. Man beachte, daß der Polynomgrad r fest ist, während die Größe der Finiten Elemente einer gleichmäßig regulären Familie mit h gegen Null konvergiert. Dies entspricht dem Vorgehen bei zusammengesetzten Quadraturverfahren, bei denen die Elementarformel ebenfalls fest ist, aber die Länge der Zerlegungsintervalle gegen Null strebt.

Da die Funktionen aus V_h stetig und in $C^1(K)$, $K \in \mathcal{T}_h$, enthalten sind, gilt:

Lemma 3.12 (vgl. [50, S.119])

$$V_h \subset C_0(\bar{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega) \quad \forall 0 < h \leq 1.$$

Also ist insbesondere $V_h \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ (vgl. (2.5)). Man spricht in diesem Zusammenhang von **konformen Finiten Elementen**, da die Ansatzfunktionen als Testfunktionen in (3.5) benutzt werden können. Sollen die Lösungen von Differentialgleichungen der höheren Ordnungen $2j$, $1 < j \in \mathbb{N}$, approximiert werden, müssen auch die Ansatzfunktionen glatter sein. Hier werden dann z.B. Hermite-Elemente (vgl. [21, S.95]) eingesetzt.

Als Beispiel betrachten wir die zu den Triangulierungen (3.18) über 2-Simplexe gebildeten Ansatzfunktionenräume. Diese sind geschachtelt, d.h., für $1 \geq h_1 > h_2 > h_3 > \dots$ gilt:

$$V_{h_1} \subset V_{h_2} \subset V_{h_3} \subset \dots \quad (3.20)$$

Durch die Basis Σ der Finiten Elemente ist auch eine **kanonische Basis (Standardbasis)** von $V_h(r)$ festgelegt: Sei

$$\bar{\Omega}_h := \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{M}_{K,r}, \quad \Omega_h := \bar{\Omega}_h \cap \Omega \quad (3.21)$$

und $\varphi_{h,\eta} \in V_h$ für $\eta \in \Omega_h$ (bzw. $\eta \in \bar{\Omega}_h$) definiert durch

$$\varphi_{h,\eta}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = \eta \\ 0 & \text{für } x \in \bar{\Omega}_h, x \neq \eta. \end{cases} \quad (3.22)$$

Die Basiselemente $\varphi_{h,\eta}$ sind eindeutig bestimmt und wohldefiniert, denn nach Satz 3.4, 3.7 bzw. 3.8 existiert zunächst zu $\eta \in \Omega_h$ auf jedem Finiten Element $K \in \mathcal{T}_h$ eine eindeutige Funktion $\varphi_{K,\eta} \in V_K$ mit

$$\varphi_{K,\eta}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = \eta \text{ und } \eta \in \mathcal{M}_{K,r} \\ 0 & \text{für } x \in \mathcal{M}_{K,r} \text{ und } x \neq \eta. \end{cases} \quad (3.23)$$

Ist $\eta \notin \mathcal{M}_{K,r}$, so ist $\varphi_{K,\eta} \equiv 0$ auf K . Andererseits bildet das System $\{\varphi_{K,\eta} : \eta \in \mathcal{M}_{K,r}\}$ eine (zu Σ duale) Basis von V_K , und wir bezeichnen daher die Funktionen $\varphi_{K,\eta}$ als **lokale Basisfunktionen**. Für $K \in \mathcal{T}_h$ muß damit $\varphi_{h,\eta}|_K = \varphi_{K,\eta}$ sein, was die Eindeutigkeit von $\varphi_{h,\eta}$ gewährleistet. Zum Nachweis der Existenz muß daher nur gezeigt werden, daß $\varphi_{h,\eta}$ als Zusammensetzung der $\varphi_{K,\eta}$ in V_h liegt. Nach Lemma 3.5 bzw. den entsprechenden Aussagen für die anderen Finiten Elementen sind die $\varphi_{K,\eta}$ auf den Seitensimplexen (bzw. Seitenrechtecken) K_S der Elemente K eindeutig festgelegt durch die Funktionswerte in den Punkten $K_S \cap \mathcal{M}_{K,r}$. Da nach Definition 3.9 die Schnittmenge zweier benachbarter Elemente K_1 und K_2 ein gemeinsamer Seitensimplex (bzw. ein gemeinsames Seitenrechteck) K_S ist und da $K_S \cap \mathcal{M}_{K_1,r} = K_S \cap \mathcal{M}_{K_2,r}$ nach Definition der Menge $\mathcal{M}_{K,r}$ gilt, folgt $\varphi_{K_1,\eta} = \varphi_{K_2,\eta}$ auf $K_1 \cap K_2$. Also ist $\varphi_{h,\eta}$ stetig. Außerdem ist $\varphi_{h,\eta}(x) = 0$ für $x \in \overline{\Omega}_h \setminus \Omega_h$ und $\eta \in \Omega_h$, so daß (vgl. Lemma 3.5) $\varphi_{h,\eta}|_{\partial\Omega} \equiv 0$, also $\varphi_{h,\eta} \in C_0(\overline{\Omega})$ und damit $\varphi_{h,\eta} \in V_h$. Die Funktionen $\varphi_{h,\eta}$, $\eta \in \Omega_h$, bilden also ein nach (3.22) linear unabhängiges System in V_h , das V_h offensichtlich auch erzeugt:

$$v = \sum_{\eta \in \Omega_h} v(\eta) \varphi_{h,\eta} \quad \forall v \in V_h. \quad (3.24)$$

Mit den lokalen Basisfunktionen $\varphi_{K,\eta}$ können wir die lokalen Interpolationsoperatoren $\Pi_{K,r}$ auch darstellen über

$$\Pi_{K,r}v = \sum_{\eta \in \mathcal{M}_{K,r}} v(\eta) \varphi_{K,\eta} \quad (= \sum_{\eta \in \mathcal{M}_{K,r}} v(\eta) \varphi_{h,\eta}|_K, \text{ falls } K \in \mathcal{T}_h). \quad (3.25)$$

Daraus wird der **globale Interpolationsoperator**

$$\Pi_{h,r} : C(\overline{\Omega}) \rightarrow \overline{V}_h := \{v \in C(\overline{\Omega}) : v|_K \in V_K \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (3.26)$$

zusammengesetzt vermöge

$$(\Pi_{h,r}v)|_K := \Pi_{K,r}v \quad \forall K \in \mathcal{T}_h. \quad (3.27)$$

Entsprechend zu V_h besitzt der Ansatzfunktionenraum ohne Randbedingungen \overline{V}_h die Basis $\{\varphi_{h,\eta} : \eta \in \overline{\Omega}_h\}$. Wie beim Nachweis der Stetigkeit der Basisfunktionen $\varphi_{h,\eta}$ folgt auch hier die Wohldefiniertheit des Operators $\Pi_{h,r}$ und die Stetigkeit von $\Pi_{h,r}v$ aus Definition 3.9, Lemma 3.5 und der Definition von $\mathcal{M}_{K,r}$. Insbesondere ist für $v \in C_0(\overline{\Omega})$ dann auch $\Pi_{h,r}v|_{\partial\Omega} = 0$, also $\Pi_{h,r}v \in V_h$. Damit sind später die erforderlichen Randbedingungen beim Abschätzen gegen einen Interpolationsfehler automatisch erfüllt. Als Konsequenz von (3.25) gilt außerdem

$$\Pi_{h,r}v = \sum_{\eta \in \Omega_h} v(\eta) \varphi_{h,\eta} \quad \forall v \in C_0(\overline{\Omega}). \quad (3.28)$$

Da die lokalen Interpolationsoperatoren Projektionen sind, gilt dies auch für $\Pi_{h,r}$:

$$\Pi_{h,r}v = v \quad \forall v \in \overline{V}_h. \quad (3.29)$$

Wir werden die kanonische Basis $\{\varphi_{h,\eta} : \eta \in \Omega_h\}$ von $V_h(r)$ später auch bei Schärfe-Überlegungen immer wieder benötigen. Die Basiselemente zeichnen sich durch relativ kleine Träger aus, die sich über wenige Elemente erstrecken: Nach Satz 3.4 (bzw. Satz 3.7, 3.8) ist $\varphi_{h,\eta} \equiv 0$ auf den $K \in \mathcal{T}_h$ mit $\eta \notin K$. Nach Folgerung 3.11 existieren aber unabhängig von h (höchstens) M verschiedene $K_j \in \mathcal{T}_h$ mit $\eta \in K_j$. Also ist

$$\text{Tr } \varphi_{h,\eta} \subset \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h: \eta \in K} K = \bigcup_{j=1}^M K_j \stackrel{(3.13), \eta \in K_j}{\subset} \overline{S(h \text{ diam } \Omega, \eta)} \quad (3.30)$$

und insbesondere

$$\text{diam Tr } \varphi_{h,\eta} \leq 2h \text{ diam } \Omega. \quad (3.31)$$

Beispiel einer Basisfunktion: Wir betrachten wieder die Triangulierung (3.12) und verwenden 2-Simplexe vom Grad 1, die Ansatzfunktionen sind also stückweise linear. Zu $\eta = (jh, lh) \in \Omega_h$ besitzt die Basisfunktion $\varphi_{h,\eta}$ (Courant-Hütchenfunktion) den Träger

$$\text{Tr } \varphi_{h,\eta} = K_{j,l}^0 \cup K_{j,l}^1 \cup K_{j+1,l+1}^0 \cup K_{j+1,l+1}^1 \cup K_{j+1,l}^1 \cup K_{j,l+1}^0. \quad (3.32)$$

Ist K eines dieser Dreiecke mit den Ecken η , y und z , so gilt für $x \in K$ (siehe [51, S.159]):

$$\varphi_{h,\eta}(x) = \frac{(x_1 - y_1)(z_2 - y_2) - (x_2 - y_2)(z_1 - y_1)}{(\eta_1 - y_1)(z_2 - y_2) - (\eta_2 - y_2)(z_1 - y_1)}. \quad (3.33)$$

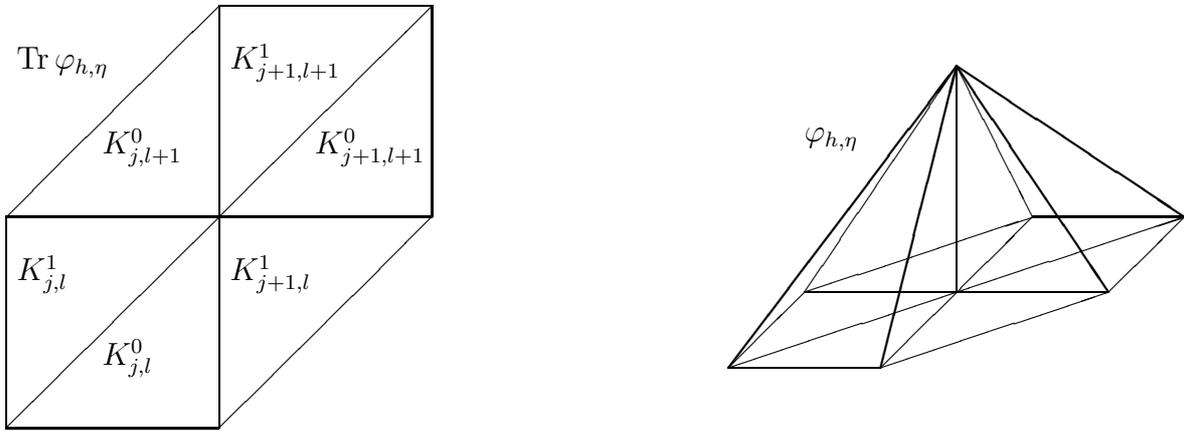


Abbildung 3.2: Basisfunktion bei stückweise linearen Elementen

3.2.3 Affine Transformation, Referenzelement

Beim Rechnen mit Ansatzfunktionenräumen wird der lokale Aufbau der Räume und die reguläre Struktur der zugrunde liegenden Triangulierung ausgenutzt. Genauer betrachtet man ein sogenanntes Referenzelement \tilde{K} , ein weiteres Finites Element, das nicht zu der Familie der Triangulierungen $\{\mathcal{T}_h : h \in (0, 1]\}$ gehören muß. Allerdings

soll sich jedes Element $K \subset \bigcup_{h \in (0,1]} \mathcal{T}_h$ mittels einer affinen Transformation aus dem Referenzelement gewinnen lassen, was bei den von uns betrachteten Triangulierungen stets möglich ist. So kann man die erforderlichen Rechnungen auf dem festen Referenzelement durchführen und dann mittels der affinen Transformation auf die Elemente der Triangulierung übertragen. Erst dabei entstehen dann Abhängigkeiten vom Parameter h . Genau so werden weiter unten die direkten Fehlerabschätzungen bewiesen: Das Bramble-Hilbert-Lemma (Satz 3.18) sorgt für die entsprechenden Abschätzungen auf dem Referenzelement, während die affine Transformation zur jeweiligen Konvergenzordnung führt. Auch beim Schärfebeweis über Gegenbeispiele ist die Lokalisation auf ein Referenzelement hilfreich.

Definition 3.13 *Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ zwei Mengen. Ω_1 und Ω_2 heißen **affin äquivalent**, falls es eine **affine Abbildung** $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$,*

$$Fx := Ax + b, \quad x \in \mathbb{R}^m,$$

mit invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gibt, so daß

$$F\Omega_1 = \Omega_2.$$

Man beachte, daß wegen der Invertierbarkeit von A auch F^{-1} existiert mit $\Omega_1 = F^{-1}\Omega_2$ und $F^{-1}x = A^{-1}(x - b)$. Das folgende Lemma beschreibt, wie sich die Normen unter der affinen Transformation verhalten:

Lemma 3.14 *(vgl. z.B. [21, S.122, Theorem 15.1]) Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ zwei affin äquivalente offene Mengen vermöge der affinen Abbildung $Fx = Ax + b$, $F\Omega_1 = \Omega_2$, und sei $s \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt für $1 \leq p \leq \infty$*

$$v \in W^{s,p}(\Omega_2) \implies v \circ F \in W^{s,p}(\Omega_1),$$

und es existiert eine nur von m und s abhängige Konstante C , so daß für alle $v \in W^{s,p}(\Omega_2)$ gilt

$$|v \circ F|_{s,p,\Omega_1} \leq C \|A\|^s |\det A|^{-\frac{1}{p}} |v|_{s,p,\Omega_2}, \quad (3.34)$$

$$|v|_{s,p,\Omega_2} \leq C \|A^{-1}\|^s |\det A|^{\frac{1}{p}} |v \circ F|_{s,p,\Omega_1}, \quad (3.35)$$

wobei $\|A\|$ die Matrix-2-Norm von A bezeichnet. Ist A eine Diagonalmatrix, so gilt außerdem für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ mit $|\alpha| = s$:

$$|v \circ F|_{\alpha,p,\Omega_1} \leq C \|A\|^s |\det A|^{-\frac{1}{p}} |v|_{\alpha,p,\Omega_2}, \quad (3.36)$$

$$|v|_{\alpha,p,\Omega_2} \leq C \|A^{-1}\|^s |\det A|^{\frac{1}{p}} |v \circ F|_{\alpha,p,\Omega_1}. \quad (3.37)$$

Es gilt nun, die Größen $\|A\|$, $\|A^{-1}\|$ und $\det A$ durch Daten der Mengen Ω_1 und Ω_2 abzuschätzen und zu sehen, wie sich die relevanten Größen der Finiten Elemente unter einer affinen Transformation verhalten.

Lemma 3.15 (vgl. [21, S.124], [9, S.80], [50, S.172]) Seien $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^m$ zwei m -Simplexe (bzw. zwei m -Rechtecke). Diese sind affin äquivalent bezüglich einer Abbildung $Fx = Ax + b$, $FK_1 = K_2$. Außerdem ist ($r \in \mathbb{N}$, $v \in C(K_2)$)

$$F(\mathcal{M}_{K_1,r}) = \mathcal{M}_{K_2,r}, \quad \mathcal{M}_{K_1,r} = F^{-1}(\mathcal{M}_{K_2,r}), \quad (3.38)$$

$$\Pi_{K_1,r}(v \circ F) = (\Pi_{K_2,r}v) \circ F. \quad (3.39)$$

Dabei seien $\Pi_{K,r}$ der Interpolationsoperator des m -Simplexes vom Grad r (bzw. des m -Rechtecks vom Grad r , bzw. des Serendipity-Elements) und $\mathcal{M}_{K,r}$ die Punktmenge aus Satz 3.4 (bzw. Satz 3.7, bzw. 3.8). Insbesondere ist damit

$$V_{K_1} = \{v \circ F : v \in V_{K_2}\}, \quad (3.40)$$

und für die lokalen Basisfunktionen $\varphi_{K,\eta}$ aus (3.23) gilt:

$$\varphi_{K_1,\eta} = \varphi_{K_2,F(\eta)} \circ F, \quad \eta \in \mathcal{M}_{K_1,r}. \quad (3.41)$$

Weiterhin gilt für die Matrix A der Transformation (ρ wie in (3.15)):

$$\|A\| \leq \frac{\text{diam } K_2}{\rho(K_1)}, \quad (3.42)$$

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\text{diam } K_1}{\rho(K_2)}, \quad (3.43)$$

$$\det A = \frac{\text{meas } K_2}{\text{meas } K_1}. \quad (3.44)$$

Bei Verwendung von m -Rechtecken oder Serendipity-Elemente ist A eine Diagonalmatrix (vgl. Definition 3.6, siehe [21, S.99]).

Im Sinne dieses Lemmas gehen bei der affinen Transformation nicht nur die Mengen K ineinander über, sondern auch die Funktionenräume V_K und die Basen Σ , die ja bei den hier betrachteten Elementen über $\mathcal{M}_{K,r}$ festgelegt sind. Man spricht daher auch von affin äquivalenten Finiten Elementen. Wir betrachten nur Familien von Triangulierungen zu genau einem Finite-Element-Typ, so daß hier ein beliebiges Element \tilde{K} dieses Typs als Referenzelement herangezogen werden kann. (Bei Verwendung mehrerer Element-Typen benötigt man entsprechend mehrere Referenzelemente.) Nach Lemma 3.15 sind dann alle Elemente der Triangulierung affin äquivalent zu \tilde{K} . Als erstes Beispiel für die Benutzung eines Referenzelements zeigen wir die folgende wichtige Normäquivalenz:

Lemma 3.16 (vgl. z.B. [70, S.45]) Sei die Familie der Triangulierungen $\{\mathcal{T}_h : 0 < h \leq 1\}$ des polygonalen Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ gleichmäßig regulär, d.h., (3.13) und (3.15) sind erfüllt. Es existieren von h unabhängige Konstanten $0 < c, C < \infty$, so daß für jedes $v \in V_h(r)$ (vgl. (3.19), $r \in \mathbb{N}$) gilt ($1 \leq p < \infty$)

$$c\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq \left[h^m \sum_{\eta \in \Omega_h} |v(\eta)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \leq C\|v\|_{L^p(\Omega)} \quad (3.45)$$

und entsprechend

$$c\|v\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \max_{\eta \in \Omega_h} |v(\eta)| \leq \|v\|_{C(\bar{\Omega})}. \quad (3.46)$$

Dabei ist $\bar{\Omega}_h := \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{M}_{K,r}$ und $\Omega_h := \bar{\Omega}_h \cap \Omega$ (vgl. (3.21)).

Beweis Sei $v \in V_h$. Wir erhalten mittels einer affinen Transformation $F_K : \tilde{K} \rightarrow K$, $F_K x = A_K x + b_k$, von einem Referenzelement \tilde{K} auf $K \in \mathcal{T}_h$:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p(\Omega)}^p &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{L^p(K)}^p \stackrel{(3.35)}{\leq} C_1 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\det A_K] \|v \circ F_K\|_{L^p(\tilde{K})}^p \\ &\stackrel{(3.44)}{=} C_1 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\text{meas } K}{\text{meas } \tilde{K}} \|v \circ F_K\|_{L^p(\tilde{K})}^p. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Einerseits gilt mit (3.11):

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p(\Omega)}^p &\stackrel{(3.47),(3.11)}{\leq} C_1 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{\text{meas } K}{\text{meas } \tilde{K}} C_{\tilde{K},r,p} \sum_{\eta \in \mathcal{M}_{\tilde{K},r}} |v \circ F_K(\eta)|^p \right] \\ &\stackrel{(3.38)}{=} C_1 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{\text{meas } K}{\text{meas } \tilde{K}} C_{\tilde{K},r,p} \sum_{\eta \in \mathcal{M}_{K,r}} |v(\eta)|^p \right] \\ &\stackrel{(3.14)}{\leq} C_2 h^m \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\sum_{\eta \in \mathcal{M}_{K,r}} |v(\eta)|^p \right]. \end{aligned}$$

Nach Folgerung 3.11 wird jedes $\eta \in \Omega_h$ in dieser Doppelsumme höchstens M -mal durchlaufen, denn zu jedem $\eta \in \Omega_h$ existieren höchstens M (unabhängig von h) verschiedene $K \in \mathcal{T}_h$ mit $\eta \in K$, d.h., $\eta \in \mathcal{M}_{K,r}$. Da außerdem $v|_{\partial\Omega} = 0$, müssen die Punkte $\eta \in \bar{\Omega}_h \setminus \Omega_h$ nicht berücksichtigt werden. Also gilt die linke Ungleichung von (3.45):

$$\|v\|_{L^p(\Omega)}^p \leq C_2 M h^m \sum_{\eta \in \Omega_h} |v(\eta)|^p.$$

Die Abschätzung nach oben ist entsprechend einfacher:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^p(\Omega)}^p &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{L^p(K)}^p \stackrel{(3.34)}{\geq} C_3 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\det A_K| \|v \circ F_K\|_{L^p(\tilde{K})}^p \\ &\stackrel{(3.44),(3.11)}{\geq} C_4 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{\text{meas } K}{\text{meas } \tilde{K}} \sum_{\eta \in \mathcal{M}_{K,r}} |v(\eta)|^p \right] \stackrel{(3.16)}{\geq} C_5 h^m \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\sum_{\eta \in \mathcal{M}_{K,r}} |v(\eta)|^p \right] \\ &\geq C_5 h^m \sum_{\eta \in \Omega_h} |v(\eta)|^p. \end{aligned}$$

Nun noch zu (3.46):

$$\begin{aligned} \max_{\eta \in \Omega_h} |v(\eta)| &\leq \|v\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \|v \circ F_K\|_{C(\bar{K})} \stackrel{(3.11)}{\leq} C \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\max_{\eta \in \mathcal{M}_{\bar{K},r}} |v \circ F_K(\eta)| \right] \\ &\stackrel{(3.38)}{=} C \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\max_{\eta \in \mathcal{M}_{K,r}} |v(\eta)| \right] \stackrel{v|_{\partial\Omega}=0}{=} C \max_{\eta \in \Omega_h} |v(\eta)|. \end{aligned}$$

■

Unter den Voraussetzungen von Lemma 3.16 gilt also für jedes $v \in V_h$:

$$\begin{aligned} \|v\|_{C(\bar{\Omega})} &\stackrel{(3.46)}{\leq} C_1 \max_{\eta \in \Omega_h} |v(\eta)| \leq C_1 \left[\sum_{\eta \in \Omega_h} |v(\eta)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \\ &= C_1 h^{-\frac{m}{p}} \left[h^m \sum_{\eta \in \Omega_h} |v(\eta)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \stackrel{(3.45)}{\leq} C_2 h^{-\frac{m}{p}} \|v\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

D.h., wir erhalten die Nikolskiĭ-Typ-Ungleichung

$$\|v\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C h^{-\frac{m}{p}} \|v\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall v \in V_h. \quad (3.48)$$

3.2.4 Die diskretisierte Aufgabe

Jetzt sind alle Daten bereitgestellt, um das diskrete Problem zu formulieren (vgl. (2.56)):

Seien V_h wie in (3.19) und $a(\cdot, \cdot)$ wie in (3.4), (3.5) mit den dort formulierten Forderungen an die Koeffizientenfunktionen.

Zu $f \in L^2(\Omega)$ ist ein $u_h \in V_h$, $0 < h \leq 1$, gesucht mit

$$a(u_h, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V_h. \quad (3.49)$$

Diese Aufgabe ist für jedes $h \in (0, 1]$ ebenfalls wieder eindeutig lösbar (vgl. Kapitel 2.5), und uns interessiert der Fehler $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$, wobei u Lösung von (3.5) ist. Daneben betrachten wir gegebenenfalls auch zu Funktionen $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ die Ritz-Projektion $P_h u$ auf V_h (siehe (2.57)), die mit u_h übereinstimmt, falls u Lösung einer Aufgabe (3.5) ist. $P_h u$ ist aber auf ganz $W_0^{1,2}(\Omega)$ erklärt, während wir die Schreibweise u_h ab jetzt nur in Verbindung mit den speziellen von der Differentialgleichung abstammenden Inhomogenitäten $(f, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ benutzen, die zusätzliche Regularität von u implizieren (vgl. Satz 3.1, siehe Bemerkung zu Lemma 2.36).

Die Lösung u_h von (3.49) läßt sich konkret durch Lösen des Gleichungssystems

$$\sum_{\eta \in \Omega_h} u_h(\eta) a(\varphi_{h,\eta}, \varphi_{h,\xi}) = (f, \varphi_{h,\xi})_{L^2(\Omega)} \quad \forall \xi \in \Omega_h \quad (3.50)$$

berechnen. Dabei wurde u_h in der Darstellung (3.24) in (3.49) eingesetzt, und statt aller $v \in V_h$ als Testfunktionen zu benutzen, reicht natürlich auch die Verwendung der Basis. Die Matrix des Gleichungssystems ist schwach besetzt (vgl. (3.31)) und das System daher, gegebenenfalls bei Verwendung eines geeigneten Vorkonditionierers, numerisch vergleichsweise gut lösbar.

3.3 Fehlerschranken in der L^2 -Norm

3.3.1 Eine a-priori-Schranke

Mit dem Lemma von Céa (Satz 2.37) erhalten wir direkt die Fehlerschranke

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leq C \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{1,2,\Omega} \leq C \|u - \bar{\Pi}_h u\|_{1,2,\Omega},$$

wobei $\bar{\Pi}_h$ ein geeigneter Interpolationsoperator nach V_h ist. Dann reduziert sich die Aufgabe auf das Ziel, eine geeignete Fehlerschranke für den Interpolationsfehler zu finden. Dabei werden wir den Äquivalenzsatz zwischen K-Funktional und Stetigkeitsmodul (Satz 2.19) ins Spiel bringen. Für $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ läßt sich schließlich mit dem Nitsche-Trick (Satz 2.39) eine Fehlerschranke aus der für $\|u - u_h\|_{1,2,\Omega}$ ableiten. Damit ist im wesentlichen das Programm zum Beweis des folgenden direkten Satzes skizziert:

Satz 3.17 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, ein polygonales Gebiet und a die koerzive, beschränkte Bilinearform (3.4) mit Koeffizienten $a_{\alpha,\beta} \in L^\infty(\Omega)$, die zusätzlich Lipschitzstetig sind, falls $|\alpha| = |\beta| = 1$. Zu $r \in \mathbb{N}$ seien $V_h = V_h(r)$ wie in Kapitel 3.2.2 Ansatzfunktionsräume, die aus m -Simplexten vom Grad r , m -Rechtecken vom Grad r oder Serendipity-Elementen vom Grad $r = 2$ zu einer gleichmäßig regulären Familie von Triangulierungen gebildet sind. Sei u Lösung von (3.5) und u_h die entsprechende von (3.49).*

a) *Ist Ω zusätzlich konvex (dann ist Ω bei Verwendung von Rechteck-Elementen selbst ein m -Rechteck), so gilt:*

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ch \|u - u_h\|_{1,2,\Omega} && (3.51) \\ &\leq \begin{cases} Ch^2 |u|_{2,2,\Omega} & \text{für } r = 1 \\ Ch^2 K(h^{r-1}, u, (W^{2,2}(\Omega), |\cdot|_{2,2,\Omega}), (W^{r+1,2}(\Omega), |\cdot|_{r+1,2,\Omega})) & \text{für } r > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Für $r > 1$ gilt weiter:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leq Ch^2 \omega_{r-1}^{(2)}(h, u, L^2(\Omega)). \quad (3.52)$$

b) Wird gegebenenfalls zusätzliche Regularität der Lösung gefordert, nämlich $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{s,2}(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}$, $r \geq s$, so gilt:

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leq Ch^{s-1} K(h^{r+1-s}, u, (W^{s,2}(\Omega), |\cdot|_{s,2,\Omega}), (W^{r+1,2}(\Omega), |\cdot|_{r+1,2,\Omega})). \quad (3.53)$$

Weiter gilt auch hier:

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leq Ch^{s-1} \omega_{r+1-s}^{(s)}(h, u, L^2(\Omega)). \quad (3.54)$$

Die Konstante C ist jeweils von h und u unabhängig.

- Da in Satz 3.17a) das Gebiet Ω konvex ist, liegt u als Lösung von (3.5) nach Satz 3.1 in $W^{2,2}(\Omega)$, so daß die rechten Seiten sinnvoll sind. Da zum Beweis von b) der Nitsche-Trick nicht erforderlich ist, kann hier auf die Konvexität von Ω , die für den Satz 3.1 benötigt wird, verzichtet werden. Damit entfällt insbesondere bei Rechteck-Elementen die Einschränkung, daß Ω selbst ein m -Rechteck sein muß.
- Die Fehlerabschätzungen sind in Abhängigkeit der exakten Lösung formuliert, die man natürlich i.a. nicht kennt. Gleichwohl sind aber oft aus den gegebenen Daten Informationen über die Regularität bzw. Glattheit der exakten Lösung ableitbar (vgl. z.B. Satz 3.1, vgl. (3.88)).
- Für m -Simplexe erscheinen die verwendeten radialen Moduln angemessen. Gemischte Moduln sind nämlich i.a. bereits auf Dreiecken nicht mit dem hier benutzten K -Funktional äquivalent (vgl. [24]). Für m -Rechtecke der Ordnung r und das Serendipity-Element umfassen die radialen Moduln aber auch solche Ableitungen bzw. Differenzen, die bei den Jackson-Typ-Abschätzungen (vgl. z.B. (3.65)) nicht auftreten. Hier geben scheinbar gemischte Moduln die Situation besser wieder (vgl. mit Λ -Moduln in [24]). Allerdings ist dies im Hinblick auf Lemma 2.24 ein vordergründiges Argument. Wir beschränken uns auf die radialen Moduln, die die Konvergenzordnung richtig ausdrücken.
- In [67, Kapitel 4] wird der Fall $r = 1$ für 2-Simplexe behandelt. Hier ist wegen der Regularität eine Abschätzung gegen Stetigkeitsmoduln nicht nötig, da die Jackson-Ungleichung ((3.51) für $r = 1$) bereits eine optimale Fehlerschranke ohne zusätzliche Voraussetzungen an die Lösung bietet. Dort werden jedoch allgemeinere Inhomogenitäten in der Aufgabenstellung zugelassen und daher die Fehler $u - P_h u$ betrachtet. Für $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und $r = 1$ erhält man dann die scharfe Fehlerschranke

$$\|u - P_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq ChK(h, u, (W_0^{1,2}(\Omega), |\cdot|_{1,2,\Omega}), (W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega), |\cdot|_{2,2,\Omega})).$$

Dieses K -Funktional läßt sich wegen der Randbedingung im Raum $W_0^{1,2}(\Omega)$ bislang nur im Fall $m = 1$ gegen einen Stetigkeitsmodul $\omega_1^{(1)}(h, u, L^2(\Omega))$ abschätzen

(vgl. Lemma 2.20). Im Beweis von Satz 3.17 wird dieses Problem umgangen, indem nicht sofort Jackson-Typ-Abschätzungen für den Fehler der Finite-Elemente-Näherung diskutiert werden, sondern zunächst gegen den Fehler eines Approximationsprozesses abgeschätzt wird, der auch für Funktionen, die die Randbedingung nicht erfüllen, erklärt ist. Hier sind dann Jackson-Typ-Ungleichungen ohne Einschränkung durch Randbedingungen möglich, die den Einsatz des Äquivalenzsatzes 2.19 gestatten. Als Approximationsprozeß bieten sich die Lagrange-Interpolationsoperatoren $\Pi_{h,r}$ an, die nach dem Sobolev-Einbettungssatz (Satz 2.9) auf $W^{s,p}(\Omega)$ für $ps > m$ definiert sind und insbesondere $W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{s,p}(\Omega)$ auf V_h abbilden. Diese Verträglichkeit mit der Randbedingung ist erforderlich, um z.B. den Fehler $\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{1,2,\Omega}$, $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{s,2}(\Omega)$, der nach Lemma 2.37 zu diskutieren ist, gegen den Interpolationsfehler abzuschätzen. Allerdings ist $\Pi_{h,r}$ für $ps \leq m$ nicht erklärt. Dieses Manko läßt sich beheben, indem statt $\Pi_{h,r}$ ein Quasi-Interpolationsoperator $\bar{\Pi}_{h,r}$ verwendet wird. Der Ansatz von Clément [23] ist aber nicht geeignet, da der dort auf $W^{s,p}(\Omega)$ definierte Operator abgeändert werden muß, um bezüglich Randbedingungen verträglich zu sein. Man hat hier auf $W^{s,p}(\Omega)$ und $W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{s,p}(\Omega)$ unterschiedliche Operatoren und kann nicht wie beim Lagrange-Interpolationsoperator abschätzen. Dieses Manko wird allerdings durch eine Verallgemeinerung von Scott und Zhang in [84] behoben, worauf Herr Esser hinwies.

Bevor auf den Quasi-Interpolationsoperator $\bar{\Pi}_{h,r}$ eingegangen wird, diskutieren wir zunächst Fehlerabschätzungen für die Lagrange-Interpolation. Diese Standardabschätzungen sind ausreichend, um Satz 3.17a) im Fall $m < 4$ und b) im Fall $m < 2s$ zu beweisen. Damit ist insbesondere der in Kapitel 5 behandelte eindimensionale Fall abgedeckt. Wir gehen ausführlich vor, da wir die Abschätzungen an späteren Stellen noch benötigen. Außerdem wird hier die Rolle des Referenzelements deutlich, das in einer entsprechenden Funktion auch beim Schärfebeweis in Kapitel 4 eingesetzt wird.

3.3.2 Bramble-Hilbert-Lemma und Abschätzungen auf einem Referenzelement

Zunächst eine Variante des Bramble-Hilbert-Lemmas (vgl. [7, 8]):

Satz 3.18 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes Gebiet, das die Kegelbedingung erfüllt. Außerdem seien $s \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$. Dann existiert eine Konstante C , so daß für jedes $u \in W^{s,p}(\Omega)$ gilt:*

$$\inf_{v \in \mathcal{P}_{s-1}} \|u - v\|_{s,p,\Omega} \leq C|u|_{s,p,\Omega}. \quad (3.55)$$

Entsprechend gilt für Funktionen $u \in C^s(\bar{\Omega})$:

$$\inf_{v \in \mathcal{P}_{s-1}} \|u - v\|_{s,\bar{\Omega}} \leq C|u|_{s,\bar{\Omega}}. \quad (3.56)$$

Dabei ist C jeweils von u unabhängig, jedoch nicht von Ω und s .

Der Beweis wird im Anhang A.4 geführt. Die Voraussetzungen sind dort etwas allgemeiner gewählt, so daß der Satz auch beim Beweis des Äquivalenzsatzes (Satz 2.19) benutzt werden kann. Mit dem Bramble-Hilbert-Lemma ergeben sich sofort Abschätzungen des lokalen Interpolationsfehlers auf einem (festen) Referenzelement, die dann im nächsten Paragraphen mittels affiner Transformation zu Fehlerschranken für den globalen Interpolationsoperator erweitert werden.

Folgerung 3.19 *Seien $K \subset \mathbb{R}^m$ ein m -Simplex oder m -Rechteck, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ und $\Pi_{K,r}$ der lokale Interpolationsoperator zum m -Simplex oder m -Rechteck vom Grad r oder zum Serendipity-Element. Dann existiert eine Konstante $C = C(r, K)$, so daß*

a) für $ps > m$, $s \leq r + 1$:

$$|u - \Pi_{K,r}u|_{j,p,K} \leq C|u|_{s,p,K} \quad \forall 0 \leq j \leq s, u \in W^{s,p}(K), \quad (3.57)$$

b) für $0 \leq s \leq r + 1$:

$$|u - \Pi_{K,r}u|_{j,K} \leq C|u|_{s,K} \quad \forall 0 \leq j \leq s, u \in C^s(K). \quad (3.58)$$

Beweis zu a) Da $u \in W^{s,p}(K)$ und $ps > m$, ist nach Satz 2.9 sogar $u \in C(K)$, und damit ist $\Pi_{K,r}u \in V_K$ wohldefiniert. Entscheidend ist, daß $\mathcal{P}_r \subset \mathcal{P}^r$ und $\mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}^{\text{Ser}}$, also $\mathcal{P}_r(K) \subset V_K$. Für $v \in \mathcal{P}_r(K)$ gilt also $\Pi_{K,r}v = v$ und

$$\begin{aligned} |u - \Pi_{K,r}u|_{j,p,K} &= |u - v + \underbrace{\Pi_{K,r}v}_{=v} - \Pi_{K,r}u|_{j,p,K} \\ &\leq |u - v|_{j,p,K} + |\Pi_{K,r}(v - u)|_{j,p,K} \\ &\leq |u - v|_{j,p,K} + \|\Pi_{K,r}\|_{[W^{s,p}(K), W^{j,p}(K)]} \|v - u\|_{s,p,K} \\ &\leq (1 + \|\Pi_{K,r}\|_{[W^{s,p}(K), W^{j,p}(K)]}) \|v - u\|_{s,p,K}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Dabei beachte man, daß $\|\Pi_{K,r}\|_{[W^{s,p}(K), W^{j,p}(K)]} < \infty$, denn

$$\|\Pi_{K,r}u\|_{j,p,K} \stackrel{(3.25)}{\leq} \sum_{\eta \in \mathcal{M}_{K,r}} |u(\eta)| \|\varphi_{K,\eta}\|_{j,p,K} \leq C_1(r, K) \|u\|_{C(K)} \stackrel{\text{Satz 2.9}}{\leq} C_2 \|u\|_{s,p,K}.$$

Die Operatornorm hängt offensichtlich von K und r ab. Dabei ist mit K die Interpretation des später festen Referenzelements verbunden. Der Polynomgrad r ist auch fest, so daß hier im folgenden nicht der aus dem Satz von Faber bekannte Divergenzfaktor auftritt. Die Lebesgue-Ungleichung (3.59) führt mit (3.55) zur Behauptung (3.57), denn

$$\inf_{v \in \mathcal{P}_r} \|u - v\|_{s,p,K} \stackrel{s-1 \leq r}{\leq} \inf_{v \in \mathcal{P}_{s-1}} \|u - v\|_{s,p,K} \stackrel{(3.55)}{\leq} C|u|_{s,p,K}.$$

zu b) Analog ist nun

$$|u - \Pi_{K,r}u|_{j,K} \leq C \inf_{v \in \mathcal{P}_r} \|u - v\|_{s,K},$$

so daß die Behauptung für $s > 0$ aus (3.56) und für $s = 0$ aus der Setzung $v = 0$ folgt. ■

Das Bramble-Hilbert-Lemma wird häufig auch funktionalanalytisch formuliert (siehe [7, 8]): Sind z.B. K ein m -Simplex, Y ein linearer, normierter Raum und $L \in [W^{r+1,p}(K), Y]$ mit $\mathcal{P}_r(K) \subset \text{Kern}(L)$. Dann gilt:

$$\|Lv\|_Y \leq C|v|_{r+1,p,K} \quad \forall v \in W^{r+1,p}(K). \quad (3.60)$$

Diese Aussage ist äquivalent zu (3.57) für $s = r+1 > m/p$: Wählen wir $Y = W^{r+1,p}(K)$ und $L = I - \Pi_{K,r}$ (I Identität), so folgt aus (3.60) die Ungleichung (3.57). Umgekehrt ist

$$\|Lu\|_Y = \|L(u - \Pi_{K,r}u)\|_Y \leq \|L\|_{[W^{r+1,p}(K), Y]} \|u - \Pi_{K,r}u\|_{r+1,p,K} \stackrel{(3.57)}{\leq} C|u|_{r+1,p,K}.$$

3.3.3 Der globale Lagrange-Interpolationsfehler

Satz 3.20 *Seien Ω polygonal und $\Pi_{h,r}$ die zu einer gleichmäßig regulären Familie von Triangulierungen durch m -Simplexe oder m -Rechtecke vom Grad r oder durch Serendipity-Elemente erzeugten Interpolationsoperatoren (3.27). Weiter seien $j \leq s \leq r+1$ und $j \in \{0, 1\}$. Dann ist*

a) für $1 \leq p < \infty$ und $ps > m$:

$$|u - \Pi_{h,r}u|_{j,p,\Omega} \leq Ch^{s-j}|u|_{s,p,\Omega} \quad \forall u \in W^{s,p}(\Omega), \quad (3.61)$$

b)

$$|u - \Pi_{h,r}u|_{j,\infty,\Omega} \leq Ch^{s-j}|u|_{s,\bar{\Omega}} \quad \forall u \in C^s(\bar{\Omega}), \quad (3.62)$$

wobei die Konstante C von h und u unabhängig ist.

Beweis (vgl. mit dem Beweis zu [21, Theorem 15.3]) Beachte zunächst, daß Satz 2.9 wegen $ps > m$ im Fall a) liefert: $u \in C(\bar{\Omega})$. Damit ist also $\Pi_{h,r}$ wohldefiniert. Wir betrachten als Referenzelement einen m -Simplex bzw. ein m -Rechteck $\tilde{K} \subset \mathbb{R}^m$. Sei nun $K \in \mathcal{T}_h$ und $Fx = Ax + b$ mit $F\tilde{K} = K$. Für $u \in W^{s,p}(\Omega)$ gilt:

$$\begin{aligned} |u - \Pi_{K,r}u|_{j,p,K} &\stackrel{(3.35)}{\leq} C_1 \|A^{-1}\|^j |\det A|^{\frac{1}{p}} |u \circ F - (\Pi_{K,r}u) \circ F|_{j,p,\tilde{K}} \\ &\stackrel{(3.39)}{=} C_1 \|A^{-1}\|^j |\det A|^{\frac{1}{p}} |u \circ F - \Pi_{\tilde{K},r}(u \circ F)|_{j,p,\tilde{K}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(3.43)}{\leq} C_1 \left(\frac{\text{diam } \tilde{K}}{\rho(K)} \right)^j |\det A|^{\frac{1}{p}} |u \circ F - \Pi_{\tilde{K},r}(u \circ F)|_{j,p,\tilde{K}} \\
& \stackrel{(3.15)}{\leq} C_2(j, \tilde{K}, \Omega) h^{-j} |\det A|^{\frac{1}{p}} |u \circ F - \Pi_{\tilde{K},r}(u \circ F)|_{j,p,\tilde{K}} \\
& \stackrel{(3.57)}{\leq} C_3(r, \tilde{K}, \Omega) h^{-j} |\det A|^{\frac{1}{p}} |u \circ F|_{s,p,\tilde{K}} \\
& \stackrel{(3.34)}{\leq} C_4(r, \tilde{K}, \Omega) h^{-j} \|A\|^s |\det A|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p}} |u|_{s,p,K} \\
& \stackrel{(3.42)}{\leq} C_4 \left(\frac{\text{diam } K}{\rho(\tilde{K})} \right)^s h^{-j} |u|_{s,p,K} \\
& \stackrel{(3.13)}{\leq} C_5(r, \tilde{K}, \Omega) h^{s-j} |u|_{s,p,K}.
\end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned}
|u - \Pi_{h,r}u|_{j,p,\Omega}^p & \stackrel{(3.27)}{=} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |u - \Pi_{K,r}u|_{j,p,K}^p \\
& \leq C_5^p h^{p(s-j)} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |u|_{s,p,K}^p = C_5^p h^{p(s-j)} |u|_{s,p,\Omega}^p. \quad (3.63)
\end{aligned}$$

Im C -Fall ist lediglich statt (3.57) die Abschätzung (3.58) und im letzten Schritt statt der Summe das Maximum zu nehmen. \blacksquare

Wir sehen insbesondere an (3.63), daß unter der schwächeren Voraussetzung $u \in C(\bar{\Omega})$ mit $u \in W^{s,p}(K)$ für alle $K \in \mathcal{T}_h$, $j \leq s \leq r+1$, $j \in \{0, 1\}$, $ps > m$, immerhin noch gilt:

$$|u - \Pi_{h,r}u|_{j,p,\Omega} \leq Ch^{s-j} \left[\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |u|_{s,p,K}^p \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (3.64)$$

Im Falle der Rechteck- und Serendipity-Elemente lassen sich mit einem Bramble-Hilbert-Lemma für Λ -Bereiche (vgl. [24, S.384]) und (3.36), (3.37) auch die folgenden Abschätzungen für $1 \leq s \leq r+1$, $j \in \{0, 1\}$ und $ps > m$ ($1 \leq p < \infty$) zeigen:

$$|u - \Pi_{h,r}u|_{j,p,\Omega} \leq Ch^{s-j} \sum_{k=1}^m |u|_{se_k,p,\Omega} \quad \forall u \in W^{s,p}(\Omega) \quad (3.65)$$

für m -Rechtecke vom Grad r und

$$\begin{aligned}
|u - \Pi_{h,r}u|_{j,p,\Omega} & \leq C \left[h^{s-j} |u|_{(s,0),p,\Omega} + h^{s-j} |u|_{(0,s),p,\Omega} + h^{2s-2-j} |u|_{(s-1,s-1),p,\Omega} \right] \\
& \quad \forall u \in W^{2(s-1),p}(\Omega)
\end{aligned}$$

für Serendipity-Elemente, wobei zusätzlich $s \in \{2, 3\}$ ist. Diese Ungleichungen ermöglichen Abschätzungen gegen Λ -Moduln, bezüglich einer Abschätzung durch radiale Moduln ergibt sich daraus keine Verbesserung (vgl. auch Bemerkung nach Satz 3.17).

Wir haben also für $s \in \mathbb{N}$, $2s > m$, $s \leq r+1$ bewiesen, daß

$$\|u - \Pi_{h,r}u\|_{1,2,\Omega} \leq Ch^{s-1} |u|_{s,2,\Omega} \quad \forall u \in W^{s,2}(\Omega) \quad (3.66)$$

ist und damit für $s < r + 1$ gilt (vgl. (2.16))

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_{h,r}u\|_{1,2,\Omega} &\leq C_1 h^{s-1} K(h^{r+1-s}, u, (W^{s,2}(\Omega), |\cdot|_{s,2,\Omega}), (W^{r+1,2}(\Omega), |\cdot|_{r+1,2,\Omega})) \\ &\stackrel{\text{Satz 2.19}}{\leq} C_2 h^{s-1} \omega_{r+1-s}^{(s)}(h, u, L^2(\Omega)) \quad \forall u \in W^{s,2}(\Omega). \end{aligned} \quad (3.67)$$

Ein alternativer Zugang zu Fehlerschranken dieser Art besteht in der Verwendung von Whitney-Typ-Ungleichungen statt der hier benutzten Jackson-Typ-Abschätzungen. Dabei werden lokale Stetigkeitsmoduln, die auf den Finiten Elementen erklärt sind, geeignet zum globalen Stetigkeitsmodul zusammengesetzt (vgl. [70], [71, S.30]).

3.3.4 Ein Quasi-Interpolationsoperator

Um die Einschränkung der Raumdimension, die bei Verwendung der Lagrange-Interpolation unvermeidbar ist, aufzuheben, wird hier der von Scott und Zhang in [84] (vgl. [9, S.118ff]) eingeführte Quasi-Interpolationsoperator $\bar{\Pi}_{h,r}$ herangezogen. Seien dazu $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein polygonales Gebiet und $V_h = V_h(r)$ Ansatzfunktionenräume zu m -Simplexe oder m -Rechtecke vom Grad r oder zum Serendipity-Element wie in (3.19). Weiter sei $\{\varphi_{h,\eta} : \eta \in \bar{\Omega}_h\}$ die kanonische Basis von \bar{V}_h (vgl. (3.26)), wobei die Funktionen $\varphi_{h,\eta}$ wie in (3.22) definiert sind – und zwar auch für die Randpunkte $\eta \in \bar{\Omega}_h \setminus \Omega_h$. Im folgenden sei $m \geq 2$ ($m = 1$ ist aber in Verbindung mit einer geeigneten Interpretation der auftretenden Integrale auch möglich).

Zur Konstruktion von $\bar{\Pi}_{h,r}$ ist zunächst zu jedem Knoten $\eta \in \bar{\Omega}_h$ ein Simplex bzw. Rechteck K_η festzulegen. Dazu verfährt man wie folgt ($\eta \in \bar{\Omega}_h$):

- a) Setze $K_\eta := K$, falls $\eta \in \text{int } K$ für ein $K \in \mathcal{T}_h$;
- b) setze $K_\eta := K_S$, falls η im Inneren einer Seite K_S eines $K \in \mathcal{T}_h$ liegt;
- c) setze $K_\eta := K_S$, falls die ersten beiden Fälle nicht zutreffen. Dabei ist K_S eine beliebig zu wählende Seite eines $K \in \mathcal{T}_h$, so daß $\eta \in K_S$. Ist jedoch $\eta \in \partial\Omega$, so muß auch K_S so gewählt werden, daß $K_S \in \partial\Omega$ (was natürlich stets möglich ist, da Ω polygonal ist).

Die Wahl der Mengen K_η ist also nicht eindeutig, und damit wird es auch entsprechend viele Möglichkeiten geben, den Operator $\bar{\Pi}_{h,r}$ zu definieren.

Zu $\eta \in \bar{\Omega}_h$ kann K_η als ein $m - 1$ - oder m -Simplex bzw. $m - 1$ - oder m -Rechteck vom Grad r aufgefaßt werden (vgl. Satz 3.4, 3.7, 3.8), wobei $\mathcal{M}_{K_\eta,r} = \mathcal{M}_{K,r} \cap K_\eta$ für $K_\eta \subset K$. Hier verzichten wir auf die gegebenenfalls formal erforderliche Variablentransformation, um die Übersichtlichkeit zu wahren. Man beachte außerdem, daß K_η bei Verwendung des Serendipity-Elements ein 1-Simplex vom Grad 2 ist. Zur lokalen Basis $\{\varphi_{K_\eta,\xi} : \xi \in$

$\mathcal{M}_{K_\eta, r}$ von V_{K_η} existiert eine $L^2(K_\eta)$ -duale Basis $\{\psi_{K_\eta, \xi} : \xi \in \mathcal{M}_{K_\eta, r}\}$ von V_{K_η} , die damit insbesondere ($\xi, \nu \in \mathcal{M}_{K_\eta, r}$)

$$\int_{K_\eta} \psi_{K_\eta, \xi}(x) \varphi_{K_\eta, \nu}(x) dx = \begin{cases} 1, & \xi = \nu \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.68)$$

erfüllt. Nach Definition von K_η ist $\eta \in \mathcal{M}_{K_\eta}$, und wir ordnen dem Punkt η die Funktion $\psi_\eta := \psi_{K_\eta, \eta}$ zu. Der Quasi-Interpolationsoperator $\bar{\Pi}_{h, r}$ ist nun für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ definiert über

$$\bar{\Pi}_{h, r} u := \sum_{\eta \in \bar{\Omega}_h} \left[\int_{K_\eta} \psi_\eta(x) u(x) dx \right] \varphi_{h, \eta}. \quad (3.69)$$

Ist $K_\eta \in \mathcal{T}_h$, so ist das Integral in (3.69) erklärt. Falls K_η aber Seite eines Elements ist, muß die Auswertung von u im Sinne des auf Seite 18 eingeführten Spur-Operators verstanden werden. Für $u \in W^{1,2}(\Omega)$ folgt dann aus der Beschränktheit des Spur-Operators, daß $u \in L^2(K_\eta)$. Der lineare Operator $\bar{\Pi}_{h, r} : W^{1,2}(\Omega) \rightarrow \bar{V}_h$ ist also wohldefiniert. Außerdem gilt $\bar{\Pi}_{h, r} : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow V_h$, d.h. $\bar{\Pi}_{h, r}$ ist mit der Randbedingung verträglich. Das folgt aus (2.5) und der Festlegung der Mengen K_η im Fall b) und insbesondere im Fall c). Weiterhin ist $\bar{\Pi}_{h, r}$ eine Projektion auf \bar{V}_h , denn jedes $u \in \bar{V}_h$ hat die Darstellung $u = \sum_{\xi \in \bar{\Omega}_h} u(\xi) \varphi_{h, \xi}$, und es gilt:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_{h, r} u &\stackrel{(3.69)}{=} \sum_{\eta \in \bar{\Omega}_h} \left[\int_{K_\eta} \psi_\eta(x) \left[\sum_{\xi \in \bar{\Omega}_h} u(\xi) \varphi_{h, \xi}(x) \right] dx \right] \varphi_{h, \eta} \\ &= \sum_{\eta \in \bar{\Omega}_h} \sum_{\xi \in \bar{\Omega}_h} u(\xi) \left[\int_{K_\eta} \psi_{K_\eta, \eta}(x) \varphi_{h, \xi}(x) dx \right] \varphi_{h, \eta} = \sum_{\eta \in \bar{\Omega}_h} u(\eta) \varphi_{h, \eta}, \end{aligned}$$

denn die Spur von $\varphi_{h, \xi}$ in K_η stimmt mit $\varphi_{K_\eta, \xi}$ überein, falls $\xi \in \mathcal{M}_{K_\eta, r}$. Anderenfalls ist sie 0. Damit ergibt sich die Aussage aus der Dualität der lokalen Basen (3.68).

Für $\bar{\Pi}_{h, r}$ gilt die folgende Stabilitätsungleichung, die sich über affine Transformationen auf Referenzelemente und die Beschränktheit des Spur-Operators herleiten läßt.

Satz 3.21 (siehe [84, (3.8)]) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, ein polygonales Gebiet und die Ansatzfunktionenräume V_h zu einer gleichmäßig regulären Familie von Triangulierungen wie in (3.19) gebildet. Dann existiert eine Konstante C , so daß für alle $K \in \mathcal{T}_h$, $0 < h \leq 1$, und $u \in W^{1,2}(\Omega)$ gilt

$$\|\bar{\Pi}_{h, r} u\|_{1,2,K} \leq C[h^{-1} \|u\|_{L^2(U_K)} + |u|_{1,2,U_K}], \quad (3.70)$$

wobei U_K die Vereinigung der $K' \in \mathcal{T}_h$ mit $K' \cap K \neq \emptyset$ ist.

Beweis Man beachte zunächst, daß wegen der gleichmäßigen Regularität der Triangulierungen auch für Seiten K_S von Elementen $K \in \mathcal{T}_h$ gilt, daß $\text{diam } K_S \leq Ch$ und

$\rho(K_S) \geq ch$, wobei die Konstanten von K und h unabhängig sind. Dies ermöglicht neben dem Einsatz eines Referenzelements für die Finiten Elementen auch die Benutzung eines weiteren Referenzelements für die Seiten.

Sei $F : \tilde{K} \rightarrow K_\eta$, $Fx := A_{K_\eta}x + b$, eine affine Transformation vom Referenzelement \tilde{K} auf K_η . Dabei ist $\tilde{K} = \tilde{K}_E \subset \mathbb{R}^m$, falls $K_\eta \in \mathcal{T}_h$, und $\tilde{K} = \tilde{K}_S \in \mathbb{R}^{m-1}$, falls K_η eine Seite ist. Damit gilt für $\xi, \nu \in \mathcal{M}_{K_\eta, r}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\tilde{K}} \psi_{K_\eta, \xi}(F(x)) \varphi_{K_\eta, \nu}(F(x)) \det A_{K_\eta} dx \\ &= \int_{K_\eta} \psi_{K_\eta, \xi}(x) \varphi_{K_\eta, \nu}(x) dx \stackrel{(3.68)}{=} \begin{cases} 1, & \xi = \nu \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nun entspricht $\varphi_{K_\eta, \nu}(F(x))$ dem lokalen Basiselement $\varphi_{\tilde{K}, F^{-1}(\nu)}$ des Referenzelements (vgl. (3.41)). Wegen der Eindeutigkeit der dualen Basisfunktion gilt

$$\psi_{\tilde{K}, F^{-1}(\eta)}(x) = (\det A_{K_\eta}) \psi_{K_\eta, \eta}(F(x)) = (\det A_{K_\eta}) \psi_\eta(F(x)).$$

Damit erhalten wir durch die Transformation auf das von h unabhängige Referenzelement \tilde{K} :

$$\begin{aligned} \|\psi_\eta\|_{L^\infty(K_\eta)} &= \|\psi_\eta(F(\cdot))\|_{L^\infty(\tilde{K})} = \frac{1}{\det A_{K_\eta}} \|\psi_{\tilde{K}, F^{-1}(\eta)}\|_{L^\infty(\tilde{K})} \\ &\leq \frac{C_1}{\det A_{K_\eta}} \stackrel{(3.44)}{=}_{K_1=\tilde{K}, K_2=K_\eta} C_1 \frac{\text{meas } \tilde{K}}{\text{meas } K_\eta} \leq C_2 \begin{cases} h^{-m}, & K_\eta \in \mathcal{T}_h \\ h^{-m+1}, & K_\eta \text{ ist Seite.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.71)$$

Als nächstes zeigen wir, daß für $v \in W^{1,2}(K)$, $K \in \mathcal{T}_h$, und jede Seite K_S von K eine von h , K und v unabhängige Konstante C existiert, so daß

$$\|v\|_{L^1(K_S)} \leq C \left[h^{\frac{m}{2}-1} \|v\|_{L^2(K)} + h^{\frac{m}{2}} |v|_{1,2,K} \right]. \quad (3.72)$$

Sei jetzt \tilde{K} ein Referenzelement für die Elemente von \mathcal{T}_h , $0 < h \leq 1$. Als gemeinsames Referenzelement \tilde{K}_S für alle Seiten K_S der $K \in \mathcal{T}_h$ läßt sich eine Seite von \tilde{K} wählen, wobei wir in der Schreibweise weiterhin auf die Variablentransformation verzichten, die \tilde{K}_S mit einem entsprechenden Element in \mathbb{R}^{m-1} identifiziert. Damit gibt es zu jedem $K \in \mathcal{T}_h$ eine affine Transformation $F_K : \tilde{K} \rightarrow K$, $F_K x := A_K x + b$, die das Referenzelement \tilde{K} in K überführt und gleichzeitig \tilde{K}_S auf eine vorgegebene Seite K_S von K abbildet. Die Restriktion auf \tilde{K}_S kann dann (nach geeigneter Variablentransformation) als affine Abbildung $F_{K_S} : \tilde{K}_S \rightarrow K_S$, $F_{K_S} := A_{K_S} x + b'$, im \mathbb{R}^{m-1} aufgefaßt werden. Damit gilt für $v \in W^{1,2}(K)$

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^1(K_S)} &\stackrel{(3.35)}{\leq} C_1 |\det A_{K_S}| \|v \circ F_{K_S}\|_{L^1(\tilde{K}_S)} \stackrel{(3.44)}{=}_{K_1=\tilde{K}_S, K_2=K_S} C_1 \frac{\text{meas } K_S}{\text{meas } \tilde{K}_S} \|v \circ F_{K_S}\|_{L^1(\tilde{K}_S)} \\ &\leq C_2 h^{m-1} \|v \circ F_{K_S}\|_{L^1(\tilde{K}_S)} \leq C_2 h^{m-1} (\text{meas } \tilde{K}_S)^{\frac{1}{2}} \|v \circ F_{K_S}\|_{L^2(\tilde{K}_S)}. \end{aligned}$$

Da der Spur-Operator beschränkt ist (siehe Seite 18), gilt weiter

$$\begin{aligned}
\|v\|_{L^1(K_S)} &\leq C_3 h^{m-1} \|v \circ F_K\|_{1,2,\tilde{K}} \\
&\stackrel{(3.34)}{\leq} C_4 h^{m-1} |\det A_K|^{-\frac{1}{2}} \left[\|v\|_{L^2(K)} + \|A_K\| |v|_{1,2,K} \right] \\
&\stackrel{(3.42), (3.44)}{\leq} C_5 h^{m-1} h^{-\frac{m}{2}} \left[\|v\|_{L^2(K)} + h |v|_{1,2,K} \right], \\
&\quad K_1 = \tilde{K}_S, K_2 = K_S
\end{aligned}$$

woraus sofort (3.72) folgt. Weiterhin ist ($v \in L^2(K)$)

$$\|v\|_{L^1(K)} \leq (\text{meas } K)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(K)} \leq Ch^{\frac{m}{2}} \|v\|_{L^2(K)}. \quad (3.73)$$

Mittels Transformation auf das Referenzelement \tilde{K} sieht man außerdem, daß ($\eta \in \bar{\Omega}_h$, beachte $h \leq 1$, vgl. (4.9))

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{h,\eta}\|_{1,2,K} &\stackrel{(3.35)}{\leq} C_1 |\det A_K|^{\frac{1}{2}} \left[\|\varphi_{h,\eta} \circ F_K\|_{L^2(\tilde{K})} + \|A_K^{-1}\| |\varphi_{h,\eta} \circ F_K|_{1,2,\tilde{K}} \right] \\
&\stackrel{(3.43), (3.44)}{\leq} C_2 \left[h^{\frac{m}{2}} \|\varphi_{\tilde{K}, F_K^{-1}(\eta)}\|_{L^2(\tilde{K})} + h^{-1} h^{\frac{m}{2}} |\varphi_{\tilde{K}, F_K^{-1}(\eta)}|_{1,2,\tilde{K}} \right] \leq C_3 h^{\frac{m}{2}-1}. \quad (3.74) \\
&\quad K_1 = \tilde{K}, K_2 = K
\end{aligned}$$

Sei also $u \in W^{s,2}(\Omega)$, $1 \leq s \leq r+1$:

$$\begin{aligned}
\|\bar{\Pi}_{h,r} u\|_{1,2,K} &\stackrel{(3.69)}{=} \left\| \sum_{\eta \in \bar{\Omega}_h} \left[\int_{K_\eta} \psi_\eta(x) u(x) dx \right] \varphi_{h,\eta} \right\|_{1,2,K} \\
&\stackrel{(3.30)}{=} \left\| \sum_{\eta \in \mathcal{M}_{K,r}} \left[\int_{K_\eta} \psi_\eta(x) u(x) dx \right] \varphi_{h,\eta} \right\|_{1,2,K} \stackrel{(3.74)}{\leq} Ch^{\frac{m}{2}-1} \sum_{\eta \in \mathcal{M}_{K,r}} \left| \int_{K_\eta} \psi_\eta(x) u(x) dx \right| \\
&\leq Ch^{\frac{m}{2}-1} \sum_{\eta \in \mathcal{M}_{K,r}} \|\psi_\eta\|_{L^\infty(K_\eta)} \|u\|_{L^1(K_\eta)}. \quad (3.75)
\end{aligned}$$

Ist nun K_η , $\eta \in \mathcal{M}_{K,r}$, eine Seite, so gilt

$$\begin{aligned}
\|\psi_\eta\|_{L^\infty(K_\eta)} \|u\|_{L^1(K_\eta)} &\stackrel{(3.71)}{\leq} C_1 h^{-m+1} \|u\|_{L^1(K_\eta)} \\
&\stackrel{(3.72)}{\leq} C_2 h^{-m+1} \left[h^{\frac{m}{2}-1} \|u\|_{L^2(K')} + h^{\frac{m}{2}} |u|_{1,2,K'} \right] = C_2 h^{-\frac{m}{2}} \left[\|u\|_{L^2(K')} + h |u|_{1,2,K'} \right],
\end{aligned}$$

wobei K' ein Element mit der Seite K_η ist. Man beachte, daß nach Konstruktion K_η keine Seite von K sein muß. Insbesondere gilt also

$$\|\psi_\eta\|_{L^\infty(K_\eta)} \|u\|_{L^1(K_\eta)} \leq Ch^{-\frac{m}{2}} \left[\|u\|_{L^2(U_K)} + h |u|_{1,2,U_K} \right],$$

denn $\eta \in K' \cap K$, und damit ist $K' \subset U_K$.

Ist K_η ein Finites Element, d.h. $K_\eta = K \in \mathcal{T}_h$, so ist

$$\|\psi_\eta\|_{L^\infty(K_\eta)} \|u\|_{L^1(K_\eta)} \stackrel{(3.71)}{\leq} C_1 h^{-m} \|u\|_{L^1(K_\eta)} \stackrel{(3.73)}{\leq} C_2 h^{-m} h^{\frac{m}{2}} \|u\|_{L^2(K)} = C_2 h^{-\frac{m}{2}} \|u\|_{L^2(K)}.$$

Setzen wir beides in (3.75) ein, so ergibt sich

$$\|\bar{\Pi}_{h,r}u\|_{1,2,K} \leq C_1 \sum_{\eta \in \mathcal{M}_{K,r}} \left[h^{-1} \|u\|_{L^2(U_K)} + |u|_{1,2,U_K} \right] = C_2 \left[h^{-1} \|u\|_{L^2(U_K)} + |u|_{1,2,U_K} \right].$$

■

Neben K müssen auf der rechten Seite von (3.70) also auch noch benachbarte Elemente berücksichtigt werden. Dadurch geht die lokale Struktur etwas verloren. Man kann daher zum Beweis einer Jackson-Typ-Abschätzung die Menge U_K nicht auf ein geeignetes Referenzgebiet transformieren und dort das Bramble-Hilbert-Lemma anwenden, um dann durch die Transformation die Abhängigkeit von h zu erhalten. Vielmehr muß jetzt direkt auf U_K ein Bramble-Hilbert-Lemma benutzt werden, bei dem die auftretende Konstante die Abhängigkeit von h bereits richtig wiedergibt. Der im Anhang geführte Beweis von Satz 3.18 ist indirekt und kann daher über die Konstante keine Aussage machen. Daher wird in [84, S.490] eine Variante von Dupont und Scott [40] benutzt, deren Beweis konstruktiv über gemittelte Taylor-Entwicklungen geführt ist.

Für $v \in \mathcal{P}_r$ (beachte: $\mathcal{P}_r \subset V_K$) gilt nach (3.70)

$$\|u - \bar{\Pi}_{h,r}u\|_{1,2,K} \leq \|u - v\|_{1,2,K} + \|\bar{\Pi}_{h,r}(v - u)\|_{1,2,K} \leq C[h^{-1}\|u - v\|_{L^2(U_K)} + |u - v|_{1,2,U_K}].$$

Nach [40] (vgl. [9, S.102] und [39] bezüglich der Konstanten) kann nun v gerade so als gemitteltes Taylor-Polynom von u gewählt werden, daß ($u \in W^{s,2}(\Omega)$, $1 \leq s \leq r + 1$)

$$\|u - v\|_{L^2(U_K)} \leq Ch^s |u|_{s,2,U_K} \quad \text{und} \quad |u - v|_{1,2,U_K} \leq Ch^{s-1} |u|_{s,2,U_K}$$

gleichzeitig gilt. Dabei sind die Konstanten von h , K und u unabhängig. Damit ergibt sich also $\|u - \bar{\Pi}_{h,r}u\|_{1,2,K} \leq Ch^{s-1} |u|_{s,2,U_K}$. Da nach Lemma 3.10 zu jedem $K \in \mathcal{T}_h$ höchstens M verschiedene $K' \in \mathcal{T}_h$ existieren mit $K \cap K' \neq \emptyset$, gibt es zu K auch nur höchstens M verschiedene $U_{K'}$ mit $K \subset U_{K'}$, wobei M unabhängig von K und h ist. Damit gilt

$$\|u - \bar{\Pi}_{h,r}u\|_{1,2,\Omega}^2 \leq Ch^{2(s-1)} \sum_{K' \in \mathcal{T}_h} |u|_{s,2,U_{K'}}^2 \leq CMh^{2(s-1)} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |u|_{s,2,K}^2 = CMh^{2(s-1)} |u|_{s,2,\Omega}^2,$$

und wir haben bewiesen:

Folgerung 3.22 (siehe [84]) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, ein polygonales Gebiet und die Ansatzfunktionenräume V_h wie in (3.19). Dann existiert eine Konstante C , so daß für $1 \leq s \leq r + 1$ gilt:

$$\|u - \bar{\Pi}_{h,r}u\|_{1,2,\Omega} \leq Ch^{s-1} |u|_{s,2,\Omega} \quad \forall u \in W^{s,2}(\Omega). \quad (3.76)$$

Schließlich erhalten wir analog zu (3.67) für $1 \leq s < r + 1$

$$\|u - \bar{\Pi}_{h,r}u\|_{1,2,\Omega} \leq Ch^{s-1} \omega_{r+1-s}^{(s)}(h, u, L^2(\Omega)) \quad \forall u \in W^{s,2}(\Omega). \quad (3.77)$$

Auf $L^2(\Omega)$ ist $\bar{\Pi}_{h,r}$ nicht wohldefiniert. Natürlich können wir aber den Fehler der Quasi-Interpolation auch in der L^2 -Norm messen. Völlig parallel zum Beweis von Folgerung 3.22 gilt für $1 \leq s \leq r+1$

$$\|u - \bar{\Pi}_{h,r}u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^s |u|_{s,2,\Omega} \quad \forall u \in W^{s,2}(\Omega)$$

und damit für $1 \leq s < r+1$

$$\|u - \bar{\Pi}_{h,r}u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^s \omega_{r+1-s}^{(s)}(h, u, L^2(\Omega)) \quad \forall u \in W^{s,2}(\Omega).$$

Jedoch ist $s = 0$ nicht zugelassen.

3.3.5 Beweis der a-priori-Schranke

Mit Satz 2.37 ist für $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{s,2}(\Omega)$, $s \in \mathbb{N}$,

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leq C \inf_{v \in V_h(r)} \|u - v\|_{1,2,\Omega} \leq C \begin{cases} \|u - \Pi_{h,r}u\|_{1,2,\Omega}, & m < 2s \\ \|u - \bar{\Pi}_{h,r}u\|_{1,2,\Omega}, & m > 1. \end{cases} \quad (3.78)$$

Im Fall $m < 2s$ ist $\Pi_{h,r}$ wohldefiniert, und in dieser Situation folgt mit (3.67) aus (3.78) bereits (3.53) und (3.54). Damit ist insbesondere $m = 1$ berücksichtigt, und im Fall $m > 1$ schließt man analog mit (3.77). Betrachten wir statt $\|u - u_h\|_{1,2,\Omega}$ den Fehler $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$, so gewinnen wir eine zusätzliche Potenz bei der Konvergenzordnung. Dazu wird Satz 2.39 in Verbindung mit dem Regularitätsergebnis Satz 3.1 benutzt (Nitsche-Trick, beachte: Ω ist jetzt nach Voraussetzung konvex):

Lemma 3.23 (vgl. [6, S.85]) *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein konvexes, polygonales Gebiet und a die Bilinearform (3.4), d.h., für die Koeffizienten $a_{\alpha,\beta} \in L^\infty(\Omega)$ gilt zusätzlich, daß $a_{\alpha,\beta}$ Lipschitz-stetig ist, falls $|\alpha| = |\beta| = 1$. Die Ansatzfunktionenräume $V_h(r)$ seien zu einer gleichmäßig regulären Familie von Triangulierungen gebildet. Dann existiert eine Konstante C , so daß für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt:*

$$\|u - P_h u\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \|u - P_h u\|_{1,2,\Omega}. \quad (3.79)$$

Beweis Zunächst sei darauf hingewiesen, daß die über $\hat{a}(u, v) := a(v, u)$ definierte Bilinearform \hat{a} ebenfalls wieder beschränkt und koerziv ist und die Voraussetzungen von Satz 3.1 erfüllt; d.h., für die eindeutige Lösung w_g zur Inhomogenität $g \in L^2(\Omega)$ von

$$\hat{a}(w_g, v) = a(v, w_g) = (v, g)_{L^2(\Omega)} = (g, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

gilt mit Satz 3.1 auch $w_g \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ und

$$|w_g|_{2,2,\Omega} \stackrel{(3.7)}{\leq} C \|g\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.80)$$

Satz 2.39 liefert nun

$$\begin{aligned} & \|u - P_h u\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq C \|u - P_h u\|_{1,2,\Omega} \sup \left\{ \frac{1}{\|g\|_{L^2(\Omega)}} \inf_{v \in V_h} \|w_g - v\|_{1,2,\Omega} : 0 \neq g \in L^2(\Omega) \right\}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Der Fehler der besten Approximation in (3.81) kann wieder mit dem Interpolationsoperator $\Pi = \Pi_{h,r}$ oder $\Pi = \bar{\Pi}_{h,r}$ abgeschätzt werden (vgl. (3.78)):

$$\begin{aligned} \inf_{v \in V_h(r)} \|w_g - v\|_{1,2,\Omega} & \leq \|w_g - \Pi w_g\|_{1,2,\Omega} \\ & \stackrel{(3.66),(3.76)}{\leq} C_1 h |w_g|_{2,2,\Omega} \stackrel{(3.80)}{\leq} C_2 h \|g\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Dies eingesetzt in (3.81) ergibt die Behauptung (3.79). \blacksquare

Nun ist nach Satz 3.1 auch $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$. Aus (3.53) bzw. (3.54) für $s = 2$ folgen mit (3.79) sofort (3.51) und (3.52) im Fall $r > 1$. Für $r = 1$ reicht es, in (3.78) die Ungleichung (3.66) bzw. (3.76) für $s = 2$, $r = 1$, einzusetzen und dann (3.79) zu beachten. Damit sind also auch (3.51) und (3.52) bewiesen. \blacksquare

3.4 Fehlerschranken mittels der Normen fraktionierter Sobolev-Räume

In verschiedenen Arbeiten (vgl. z.B. [4], [9, S.283], [53]) werden Fehlerschranken im Sinne von Lemma 3.24 (siehe unten) untersucht, die sich aus der reellen Interpolation von Banach-Räumen ergeben. Diese Schranken sind aber i.a. im Gegensatz zu den Abschätzungen gegen Stetigkeitsmoduln bezüglich der Konvergenzordnung nicht scharf, genauer: sie lassen sich in Abhängigkeit der konkreten Lösung verbessern. Dagegen ist die Konvergenzordnung nicht unabhängig von der jeweiligen Lösung auf dem gesamten betrachteten Raum verbesserbar.

Lemma 3.24 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, ein polygonales Gebiet, $V_h(r)$ durch eine gleichmäßig reguläre Familie von Triangulierungen erzeugte Ansatzfunktionenräume (siehe (3.19)). Dann gilt für Lösungen u von (3.5), die zusätzlich $u \in W^{\nu,2}(\Omega)$ für ein $\nu \in \mathbb{R}$, $1 \leq \nu \leq r + 1$, erfüllen:*

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leq C h^{\nu-1} \|u\|_{\nu,2,\Omega}. \quad (3.82)$$

Dabei ist C von u und h unabhängig.

Beweis Wir setzen (vgl. (3.27)) $Tu := u - \Pi_{h,r}u$ bzw. $Tu := u - \bar{\Pi}_{h,r}u$ und erhalten mit (3.66) bzw. (3.76):

$$\begin{aligned} \|T\|_{[W^{1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega)]} & \leq C \\ \|T\|_{[W^{r+1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega)]} & \leq C h^r, \end{aligned}$$

womit die Aussage für die Randpunkte 1 und $r + 1$ bereits gezeigt ist (vgl. (3.78)). Mit Lemma 2.26 folgt für $0 < \Theta < 1$ (beachte: $W^{1,2}(\Omega) = [W^{1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega)]_{\Theta,2}$ mit äquivalenten Normen, vgl. Kapitel 2.3):

$$\begin{aligned} \|T\|_{[[W^{1,2}(\Omega), W^{r+1,2}(\Omega)]_{\Theta,2}, W^{1,2}(\Omega)]} &\leq C_1 \|T\|_{[[W^{1,2}(\Omega), W^{r+1,2}(\Omega)]_{\Theta,2}, [W^{1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega)]_{\Theta,2}]} \\ &\stackrel{(2.21)}{\leq} C_1 \|T\|_{[W^{1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega)]}^{1-\Theta} \|T\|_{[W^{r+1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega)]}^{\Theta} \\ &\leq C_2 h^{r\Theta}. \end{aligned}$$

Nun gilt wegen (2.22) mit $\Theta = \frac{\nu-1}{r}$ für $u \in W^{\nu,2}(\Omega)$, $1 < \nu < r + 1$:

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_{h,r} u\|_{1,2,\Omega} &\leq C_1 \|T\|_{[[W^{1,2}(\Omega), W^{r+1,2}(\Omega)]_{\Theta,2}, W^{1,2}(\Omega)]} \|u\|_{\nu,2,\Omega} \\ &\leq C_2 h^{\nu-1} \|u\|_{\nu,2,\Omega}, \end{aligned}$$

so daß im Hinblick auf (3.78) die Aussage (3.82) auch für die intermediären Werte von ν folgt. \blacksquare

Diese Abschätzung ist jedoch nicht scharf. Das liegt daran, daß hier Interpolationsräume zu $q = 2$ (und nicht zu $q = \infty$) benutzt werden. Mit Satz 3.17b) folgt, daß in Verschärfung von Lemma 3.24 für $1 \leq \nu < r + 1$ und $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{\nu,2}(\Omega)$ sogar gilt:

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} = o(h^{\nu-1}). \quad (3.83)$$

Wir beweisen dies kurz: Zunächst sei $1 < \nu < r + 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{1,2,\Omega} &\stackrel{(3.53)}{\leq} CK(h^r, u, (W^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{1,2,\Omega}), (W^{r+1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{r+1,2,\Omega})) \\ &\leq CK(h^r, u, (W^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{1,2,\Omega}), (W^{r+1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{r+1,2,\Omega})). \end{aligned}$$

Mit $\Theta = \frac{\nu-1}{r}$ (wie oben) ist

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty t^{-2\Theta} K\left(t, u, (W^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{1,2,\Omega}), (W^{r+1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{r+1,2,\Omega})\right)^2 \frac{dt}{t} \\ &= \|u\|_{[W^{1,2}(\Omega), W^{r+1,2}(\Omega)]_{\Theta,2}}^2 \stackrel{(2.22)}{\leq} C \|u\|_{\nu,2,\Omega}^2 < \infty, \end{aligned} \quad (3.84)$$

so daß $K(t, u, (W^{1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{1,2,\Omega}), (W^{r+1,2}(\Omega), \|\cdot\|_{r+1,2,\Omega})) =: \varphi(t; u)t^\Theta = o(t^\Theta)$ ($t \rightarrow 0+$), da sonst das Integral nicht endlich sein kann. Mit $t = h^r$ gilt also

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leq C\varphi(h^r; u)h^{\Theta r} = o(h^{\nu-1}).$$

Für $\nu = 1$ folgt (3.83) aus (3.54), denn wegen der Stetigkeit im Mittel (siehe z.B. [2, S.69] in Verbindung mit [1, S.91]) ist

$$\omega_r^{(1)}(h, u, L^2(\Omega)) \stackrel{\text{Lemma 2.16d)}}{\leq} 2^{r-1} \omega_1^{(1)}(h, u, L^2(\Omega)) = o(1) \quad (h \rightarrow 0+).$$

Ohne Stetigkeitsmoduln zu verwenden, geben Babuška und Kellogg in [4] eine individuelle Verbesserung der Konvergenzordnung an und zeigen deren Schärfe mittels eines \blacksquare

expliziten Beispiels. Außerdem wird darauf hingewiesen, daß die hinzugewonnene Konvergenzgeschwindigkeit $\varphi(t; u)$ nicht beliebig gering sein kann. Schließlich gilt wegen (3.84):

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(t; u)^2}{t} dt < \infty.$$

Insbesondere kann damit für kleine t nicht $\varphi(t; u) \geq C|\log t|^{-1/2}$ sein.

Unabhängig von der konkreten Lösung läßt sich die Fehlerschranke jedoch nicht verbessern. Das wird in [3, S.232] mittels N-Width gezeigt. Andererseits folgt dies auch als Anwendung von Satz 2.29 (siehe Satz 4.20).

3.5 Fehlerschranken in negativen Normen

Für einige Zwecke führen Fehlerabschätzungen in den negativen Normen (2.10) zu besseren Ergebnissen (siehe [89, S.167, 168]). Negative Normen werden daneben z.B. in Verbindung mit lokalen Fehlerabschätzungen benutzt, um den Einfluß des Gesamtgebiets geeignet in die Fehlerschranken einzubauen (vgl. [93]). Wir messen den Fehler jetzt also in den Normen ($u \in L^2(\Omega)$, $0 < \nu \in \mathbb{R}$)

$$\|u\|_{-\nu, 2, \Omega} := \sup_{0 \neq v \in W^{\nu, 2}(\Omega)} \frac{(u, v)_{L^2(\Omega)}}{\|v\|_{\nu, 2, \Omega}},$$

und erhalten die folgende Fehlerabschätzung:

Satz 3.25 (vgl. [9, S.141], [89, S.166–167]) *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein konvexes, polygonales Gebiet, a die koerzive, beschränkte Bilinearform (3.4) mit Koeffizienten $a_{\alpha, \beta} \in L^\infty(\Omega)$ die für $|\alpha| = |\beta| = 1$ zusätzlich Lipschitz-stetig sind. Weiter seien V_h wie in (3.19) und $0 \leq \nu \in \mathbb{R}$ eine feste Zahl mit $\nu + 2 \leq r + 1$. Außerdem sei für jede Inhomogenität $g \in W^{\nu, 2}(\Omega)$ die zugehörige Lösung w_g der (dualen) Aufgabe*

$$a(v, w_g) = (v, g)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in W_0^{1, 2}(\Omega)$$

sogar in $W^{\nu+2}(\Omega)$ enthalten mit

$$\|w_g\|_{\nu+2, 2, \Omega} \leq C\|g\|_{\nu, 2, \Omega}, \tag{3.85}$$

wobei die Konstante C von w_g (und g , aber nicht unbedingt von ν) unabhängig ist (zusätzliche Regularität). Dann gilt für die Lösung u von (3.5):

$$\|u - u_h\|_{-\nu, 2, \Omega} \leq C_1 h^{\nu+1} \|u - u_h\|_{1, 2, \Omega} \leq C_2 h^{\nu+2} \omega_{r-1}^{(2)}(h, u, L^2(\Omega)). \tag{3.86}$$

Dabei hängen die Konstanten C_1 und C_2 nicht von h und u ab, jedoch evtl. von ν .

Beweis Wir erhalten mit dem Nitsche-Trick (2.61) wie in Kapitel 3.3.5 für $g \in W^{\nu,2}(\Omega)$

$$\begin{aligned}
& |(u - u_h, g)| \\
& \stackrel{(2.61)}{\leq} C_1 \|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \inf_{v \in V_h} \|w_g - v\|_{1,2,\Omega} \leq C_1 \|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \|w_g - (w_g)_h\|_{1,2,\Omega} \\
& \stackrel{(3.82), \nu+2 \leq r+1}{\leq} C_2 \|u - u_h\|_{1,2,\Omega} h^{\nu+1} \|w_g\|_{\nu+2,2,\Omega} \stackrel{(3.85)}{\leq} C_3 \|u - u_h\|_{1,2,\Omega} h^{\nu+1} \|g\|_{\nu,2,\Omega},
\end{aligned}$$

so daß also $\|u - u_h\|_{-\nu,2,\Omega} \leq Ch^{\nu+1} \|u - u_h\|_{1,2,\Omega}$. Die Abschätzung gegen den Stetigkeitsmodul folgt schließlich mit (3.52). \blacksquare

Obwohl wir im Beweis die verbesserbare Abschätzung (3.82) verwenden, erweist sich (3.86) als scharf (siehe Satz 4.22). Dies liegt an der Bildung des Supremums in der Definition der negativen Norm. Die Konvergenzordnung ist also um die Potenz h^ν höher als bei der Fehlerschranke in der L^2 -Norm. Man beachte aber, daß wir dabei von der Regularitätsaussage (3.85) ausgegangen sind. Für Gebiete Ω mit hinreichend glattem Rand ist diese unproblematisch (siehe z.B. [51, S.197]); und die obige Fehlerabschätzung läßt sich für diese Gebiete auf die Situation konformer, isoparametrischer Elemente sinnvoll ausdehnen. Wir betrachten hier aber polygonale Gebiete, so daß der Rand Ecken aufweist. Hier liefert der Satz 3.1 nur den Fall $\nu = 0$ und damit keinen Beitrag. Während einspringende Ecken sehr problematisch sind (vgl. z.B. [60, S.92ff]), gelten aber auch z.B. für konvexe, polygonale Gebiete bessere Regularitätsaussagen als Satz 3.1. Speziell für den Laplace-Operator, genauer für die zugehörige Bilinearform

$$a(u, v) = \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx = \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx, \quad (3.87)$$

werden in [25, S.160] allgemeine Regularitätsaussagen formuliert. Wir beschränken uns auf die folgenden Beispiele für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

Gebiet Ω	(3.85) gilt für
regulärer Tetraeder	$0 \leq \nu < \frac{\pi}{\arccos(1/3)} - 1$
Würfel	$0 \leq \nu < 1$
Oktaeder	$0 \leq \nu < \frac{\pi}{2 \arccos(1/\sqrt{3})} - 1$

(3.88)

Zum Beweis dieser Aussagen sei auf [25] verwiesen. Denn [25, Satz 18.18] liefert in Verbindung mit [25, S.161] die gewünschte Regularität der Lösung. Für die Normabschätzung (3.85) sorgt [25, Satz 18.19] in Verbindung mit [25, (5.2), S.41] (beachte: aus der Fredholm-Eigenschaft ([25, Satz 18.19]) folgt die Semi-Fredholm-Eigenschaft und damit über [25, (5.2)] die Behauptung). \blacksquare

3.6 Der Fehler in der Supremum-Norm

Die Finite-Elemente-Methode ist Hilbert-Raum-Theorie. Daher ergeben sich die Fehlerschranken der vorangehenden Abschnitte in natürlicher Weise. Die sup-Norm erscheint

aber als Fehlermaß in vielerlei Hinsicht vorteilhafter. Die Herleitung solcher Schranken ist jedoch sehr aufwendig. Daher werden in der Literatur hauptsächlich sehr einfache Beispielprobleme diskutiert. Dem folgend beschränken wir uns auf die Raumdimension $m = 2$, betrachten 2-Simplexe (also Dreiecke) vom Grad r und wählen konkret die Bilinearform (3.87), die sich aus der Poisson-Gleichung ergibt.

Auf dem konvexen, polygonalen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sei also die beschränkte, symmetrische, $W_0^{1,2}(\Omega)$ -elliptische Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ aus (3.87) gegeben (vgl. (3.4)). Die Ansatzfunktionenräume V_h seien gemäß (3.19) wieder zu einer gleichmäßig regulären Familie von Triangulierungen gebildet. Für $u \in C_0(\overline{\Omega})$ betrachten wir nun in Anlehnung an [76] statt (3.49) die folgende diskrete Aufgabe:

Zu u ist ein $u_h \in V_h(r)$, $0 < h \leq 1$, gesucht, so daß

$$a(u_h, v) = \tilde{a}(u, v) \quad \forall v \in V_h, \quad (3.89)$$

wobei für $u \in C_0(\overline{\Omega})$ und $v \in V_h$

$$\tilde{a}(u, v) := \tilde{a}_h(u, v) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[- \int_K u(x) \Delta v(x) dx + \int_{\partial K} u(x) \nabla v(x) \nu(x) d\sigma(x) \right]$$

und $\Delta = D^{(2,0)} + D^{(0,2)}$. Dabei ist beim Kurvenintegral $\nabla v(x)$ die stetige Fortsetzung von $\text{int } K$ auf ∂K (vgl. (2.6)).

Da nur $u \in C_0(\overline{\Omega})$ gefordert ist (beachte: $C_0(\overline{\Omega}) \not\subset W_0^{1,2}(\Omega)$), kann u nicht in a eingesetzt werden und ist i.a. keine Lösung einer Aufgabe (3.5). Ist jedoch zusätzlich $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, so folgt mit Satz 2.12

$$\tilde{a}(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u(x) \nabla v(x) dx = a(u, v). \quad (3.90)$$

Ist also u eine (stetige, vgl. Sätze 3.1, 2.9) Lösung von (3.5), so sind die Aufgaben (3.49) und (3.89) identisch. Weiter beachte man, daß auch (3.89) nach Satz 2.35 wieder eindeutig lösbar ist. Denn die rechte Seite $\tilde{a}(u, \cdot)$ beschreibt ein lineares Funktional, das, da V_h endlich-dimensional ist, bezüglich $(V_h, \|\cdot\|_{1,2,\Omega})$ beschränkt ist.

Mit der Nikolskiĭ-Typ-Ungleichung (3.48) erhalten wir sofort elementar für $u \in C_0(\overline{\Omega}) \cap C^{r+1}(\overline{\Omega})$ die Fehlerschranke

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{C(\overline{\Omega})} &\leq \|u - \Pi_{h,r}u\|_{C(\overline{\Omega})} + \underbrace{\|\Pi_{h,r}u - u_h\|}_{\in V_h} \|C(\overline{\Omega})\| \\ &\stackrel{(3.48)}{\leq} \|u - \Pi_{h,r}u\|_{C(\overline{\Omega})} + C_1 h^{-1} \|\Pi_{h,r}u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \|u - \Pi_{h,r}u\|_{C(\overline{\Omega})} + C_1 h^{-1} \|u - \Pi_{h,r}u\|_{L^2(\Omega)} + C_1 h^{-1} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C_2 (1 + h^{-1}) \|u - \Pi_{h,r}u\|_{C(\overline{\Omega})} + C_1 h^{-1} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\stackrel{(3.51),(2.17)}{\leq} C_2 (1 + h^{-1}) \|u - \Pi_{h,r}u\|_{C(\overline{\Omega})} + C_3 h^{-1} h^{r+1} |u|_{r+1,2,\Omega} \\ &\stackrel{(3.62)}{\leq} C_4 (1 + h^{-1}) h^{r+1} |u|_{r+1,\overline{\Omega}} + C_3 h^r |u|_{r+1,2,\Omega} \\ &\leq C_5 h^r |u|_{r+1,\overline{\Omega}}. \end{aligned}$$

Im Vergleich mit der L^2 -Fehlerschranke (vgl. (3.52)) wäre eigentlich die Konvergenzordnung h^{r+1} zu erwarten. Für $r > 1$ ist dem auch so, für $r = 1$ kommt allerdings ein notwendiger log-Faktor hinzu. Wir zitieren jetzt die tiefliegenden direkten Resultate.

Satz 3.26 (siehe [76]) *Seien Ω ein konvexes, polygonales Gebiet, a wie in (3.87), $u \in C_0(\overline{\Omega})$ und $u_h \in V_h(r)$ die zugehörige Lösung von (3.89). Dann existiert ein $0 < h_0 \leq 1$, so daß für $0 < h \leq h_0$:*

$$\|u - u_h\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C \begin{cases} |\log h| \inf_{v \in V_h(r)} \|u - v\|_{C(\overline{\Omega})} & \text{für } r = 1 \\ \inf_{v \in V_h(r)} \|u - v\|_{C(\overline{\Omega})} & \text{für } r > 1. \end{cases} \quad (3.91)$$

Ist zusätzlich $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, so gilt:

$$\|u - u_h\|_{1,\infty,\Omega} \leq C \begin{cases} |\log h| \inf_{v \in V_h(r)} \|u - v\|_{1,\infty,\Omega} & \text{für } r = 1 \\ \inf_{v \in V_h(r)} \|u - v\|_{1,\infty,\Omega} & \text{für } r > 1. \end{cases} \quad (3.92)$$

Dabei ist die Konstante C jeweils von h und u unabhängig.

Die Ursache des log-Faktors in (3.91) kann in der Singularität der Green-Funktion zur zweidimensionalen Poisson-Gleichung gesehen werden. Eine vergleichbare Fehlerschranke wird in [82] bewiesen, indem die Abschätzung auf die Frage der Approximierbarkeit der Green-Funktion in der $W^{1,1}(\Omega)$ -Norm reduziert wird, wobei sich gerade dabei der log-Faktor ergibt. Auch für den Nachweis der Schärfe wird die Singularität der Green-Funktion wichtig, da sie sich auf die diskrete Green-Funktion eines Differenzenverfahrens überträgt, das dabei wesentlich benutzt wird (siehe Kapitel 4.4). In einer vergleichbaren eindimensionalen Situation entfällt der log-Faktor (vgl. (5.4)). Eine genauere Analyse des Falls $r = 1$ in (3.92) zeigt, daß auch hier auf den log-Faktor verzichtet werden kann, d.h. die Abschätzung (3.92) läßt sich noch verbessern zum folgenden in [74] bewiesenen Resultat ($r = 1$, $u \in C_0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$):

$$\|u - u_h\|_{1,\infty,\Omega} \leq C \|u - \Pi_{h,1}u\|_{1,\infty,\Omega}. \quad (3.93)$$

Um nun Glattheitsmaße einzubauen, benutzen wir die aus (3.62) für $j \in \{0, 1\}$ folgende Stabilitäts- und Jackson-Typ-Ungleichung für $u \in C^s(\overline{\Omega})$, $1 \leq s \leq r + 1$,

$$\|u - \Pi_{h,r}u\|_{C(\overline{\Omega})} + h \|u - \Pi_{h,r}u\|_{1,\infty,\Omega} \leq Ch^s |u|_{s,\overline{\Omega}}, \quad (3.94)$$

wobei auch hier wieder die Konstante C von h und u unabhängig ist. Wir erhalten damit sofort:

Folgerung 3.27 *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.26 existiert eine von h und u unabhängige Konstante C , so daß für $0 < h \leq h_0$:*

$$\|u - u_h\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C \begin{cases} |\log h| K(h^2, u, (C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C(\overline{\Omega})}), (C^2(\overline{\Omega}), |\cdot|_{2,\overline{\Omega}})) & \text{für } r = 1 \\ K(h^{r+1}, u, (C(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C(\overline{\Omega})}), (C^{r+1}(\overline{\Omega}), |\cdot|_{r+1,\overline{\Omega}})) & \text{für } r > 1. \end{cases} \quad (3.95)$$

Ist zusätzlich $u \in C^s(\bar{\Omega})$, $1 \leq s \leq r$, so gilt:

$$\|u - u_h\|_{1,\infty,\Omega} \leq Ch^{s-1}K(h^{r+1-s}, u, (C^s(\bar{\Omega}), |\cdot|_{s,\bar{\Omega}}), (C^{r+1}(\bar{\Omega}), |\cdot|_{r+1,\bar{\Omega}})). \quad (3.96)$$

Beweis Für $u \in C_0(\bar{\Omega})$ ist $\inf_{v \in V_h(r)} \|u - v\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \|u - \Pi_{h,r}u\|_{C(\bar{\Omega})}$. Außerdem ist $\|u - \Pi_{h,r}u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C_r \|u\|_{C(\bar{\Omega})}$, da die Operatornorm $\|\Pi_{h,r}\|_{[C(\bar{\Omega})]}$ nach (3.62) (mit $s = j = 0$) gleichgradig bezüglich h beschränkt ist. Zusammen mit (3.94) folgt (vgl. (2.16))

$$\|u - \Pi_{h,r}u\|_{C(\bar{\Omega})} \leq CK(h^{r+1}, u, (C(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C(\bar{\Omega})}), (C^{r+1}(\bar{\Omega}), |\cdot|_{r+1,\bar{\Omega}})) \quad (3.97)$$

für $u \in C(\bar{\Omega})$, so daß die erste Schranke mit (3.91) folgt. Die zweite ergibt sich entsprechend aus (3.92) bzw. (3.93) im Fall $r = 1$, da mit (3.94) für $u \in C^s(\bar{\Omega})$ gilt (vgl. (2.16)):

$$\|u - \Pi_{h,r}u\|_{1,\infty,\Omega} \leq Ch^{s-1}K(h^{r+1-s}, u, (C^s(\bar{\Omega}), |\cdot|_{s,\bar{\Omega}}), (C^{r+1}(\bar{\Omega}), |\cdot|_{r+1,\bar{\Omega}})). \quad (3.98)$$

■

Wenden wir schließlich noch den Äquivalenzsatz zwischen K-Funktional und Stetigkeitsmodul (Satz 2.19) an, so folgt:

Folgerung 3.28 *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.26 existiert eine von h und u unabhängige Konstante C , so daß für $0 < h \leq h_0$:*

$$\|u - u_h\|_{C(\bar{\Omega})} \leq C \begin{cases} |\log h| \omega_2(h, u, C(\bar{\Omega})) & \text{für } r = 1 \\ \omega_{r+1}(h, u, C(\bar{\Omega})) & \text{für } r > 1. \end{cases} \quad (3.99)$$

Ist zusätzlich $u \in C^s(\bar{\Omega})$, $1 \leq s \leq r$, so gilt für $r \geq 1$:

$$\|u - u_h\|_{1,\infty,\Omega} \leq Ch^{s-1} \omega_{r+1-s}^{(s)}(h, u, C(\bar{\Omega})). \quad (3.100)$$

Für $r > 1$ folgt in dieser Situation aus (3.99) insbesondere auch

$$\|u - u_h\|_{C(\bar{\Omega})} \leq Ch^s \omega_{r+1-s}^{(s)}(h, u, C(\bar{\Omega})). \quad (3.101)$$

Kapitel 4

Schärfe der globalen Fehlerschranken

Wir zeigen in diesem Kapitel die Schärfe der bislang bewiesenen direkten Sätze mittels Umkehraussagen und Gegenbeispielen.

4.1 Umkehrresultate

In diesem Paragraphen diskutieren wir die Möglichkeit, die Schärfe der direkten Abschätzungen aus Satz 3.17 und Folgerung 3.28 mittels Umkehraussagen zu beweisen. Dabei wird aus dem Approximationsfehler $u - u_h$ auf die Glattheit der Lösung u geschlossen. Optimal wäre eine starke Abschätzung des Fehlers nach unten gegen den gleichen Stetigkeitsmodul wie bei der direkten Jackson-Typ-Abschätzung nach oben, also z.B. in der Situation von Satz 3.17 für $r > 1$ (vgl. (3.52)):

$$ch^2 \omega_{r-1}^{(2)}(h, u, L^2(\Omega)) \leq \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \omega_{r-1}^{(2)}(h, u, L^2(\Omega)).$$

Das können wir so jedoch nicht realisieren, aber wir erhalten Aussagen vom Typ (vgl. Folgerung 4.11)

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(h^{2+\nu(r-1)}) \iff \omega_{r-1}^{(2)}(\delta, u, L^2(\Omega)) = \mathcal{O}(\delta^{\nu(r-1)})$$

unter Nebenbedingungen für $0 < \nu \leq 1$.

Um die generelle Bedeutung von Schärfeaussagen für die Fehlerabschätzungen von Finite-Elemente-Verfahren zu unterstreichen, verweisen wir auf [6, S.79]. Dort wird im Prinzip von dem folgenden funktionalanalytisch formulierten Umkehrsatz ausgegangen:

Sei U ein Banach-Raum, der kompakt in den linearen, normierten Raum X eingebettet ist. Außerdem sei $(U_n)_{n=1}^\infty \subset U$ eine Folge (endlich-dimensionaler) geschachtelter Räume, d.h. $U_1 \subset U_2 \subset U_3 \subset \dots$, und es sei für ein $\nu \in (0, \infty)$ die Bernstein-Typ-Ungleichung

$$\|v\|_U \leq Cn^\nu \|v\|_X \quad \forall v \in U_n, n \in \mathbb{N}$$

erfüllt. Gilt nun für ein $u \in X$

$$\inf_{v \in U_n} \|u - v\|_X = \mathcal{O}(n^{-\nu}) \quad (n \rightarrow \infty),$$

so ist bereits $u \in U$.

Für die konkrete Anwendung dieses Ergebnisses werden die Setzungen $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ und $U_n = V_h$ (vgl. (3.19)), $h = 1/n$, vorgeschlagen, wobei die Ansatzfunktionenräume dann sukzessive ineinander enthalten sein müssen. Für U wäre ein Sobolev-Raum höherer Ordnung wünschenswert. Dann kommentiert Braess [6, S.79]:

„Diese Aussage hat weitreichende Konsequenzen für die Finite-Element-Praxis. Wenn man von der Lösung u einer Randwertaufgabe weiß, daß sie nicht in einem höheren Sobolev-Raum enthalten ist, ist die Finite-Element-Näherung weniger gut.“

Für uns ist diese Einschätzung Anlaß genug, die Schärfeproblematik generell zu untersuchen – und es gibt einen gewissen Handlungsbedarf, denn neben Problemen beim Beweis des obigen Umkehrsatzes läßt sich U i.a. gerade nicht als höherer Sobolev-Raum wählen, da die Ansatzfunktionen nicht genügend glatt sind. Sie sind nämlich nur einmal schwach differenzierbar. Daher werden in [6] gitterabhängige Normen eingeführt, die aber nicht zum obigen Zitat passen. Letztlich ist das Problem offensichtlich: Aus der Ordnung, mit der sich eine Funktion u durch nicht-glatte Ansatzfunktionen approximieren läßt, kann nicht auf die Glattheit von u geschlossen werden.

Zunächst stellen wir dar, was man trotzdem aus dem bislang beschriebenen Ansatz gewinnen kann. Dann greifen wir die aus der Theorie der Splines bekannten Mixing-Bedingungen auf und erhalten, [24] und [97] folgend, wesentlich mehr – allerdings auf Kosten der Mixing-Bedingungen, die keine sukzessive Verfeinerung der Triangulierungen gestatten. Damit sind aber zugleich viele praktisch wichtige Algorithmen ausgeschlossen (Hierarchische Basen, Multi-Level-Verfahren).

4.1.1 Geschachtelte Ansatzfunktionenräume

Wir benutzen hier die klassische Methode des Beweises einer Umkehraussage mittels Bernstein-Ungleichung und Teleskopsumme über den Satz 2.33. Dazu müssen aber die Räume der Ansatzfunktionen geschachtelt sein. Dies ist eine beweistechnische Voraussetzung, die z.B. im eindimensionalen Fall in [28] mit Hilfe von Halbnormen, die das Verhalten der Ansatzfunktionen in den Sprungstellen ihrer Ableitungen beschreiben, wégdiskutiert wird. Zum Beweis einer Bernstein-Typ-Ungleichung benötigen wir einige Hilfsaussagen:

Lemma 4.1 (vgl. [70]) *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ polygonal, $\{\mathcal{T}_h : 0 < h \leq 1\}$ eine gleichmäßig reguläre Familie von Triangulierungen und V_h die zugehörigen Ansatzfunktionenräume*

(siehe (3.19)), gebildet durch m -Simplexe vom Grad r , m -Rechtecke vom Grad r oder das Serendipity-Element. Außerdem sei $\{\varphi_{h,\eta} : \eta \in \Omega_h\}$ die Standardbasis (3.22) von V_h . Zu $\nu \in \mathbb{R}^m$ mit $|\nu| \leq h$ und $\eta \in \Omega_h$ sei (mit $\Omega((r+1)\nu) := \{x \in \Omega : x + t(r+1)\nu \in \Omega, 0 \leq t \leq 1\}$ wie in Kapitel 2.2)

$E_{h,\eta,\nu} := \{x \in \Omega((r+1)\nu) : \text{Die Verbindungsstrecke } S \text{ von } x \text{ und } x + (r+1)\nu \text{ schneidet den Rand von mindestens einem } K \in \mathcal{T}_h \text{ und } \varphi_{h,\eta} \neq 0 \text{ auf } S\}.$

a) Es existieren von h , η und ν unabhängige Konstanten C_1 und C_2 mit

$$E_{h,\eta,\nu} \subset S(C_1 h, \eta) \quad (4.1)$$

$$\text{meas } E_{h,\eta,\nu} \leq C_2 |\nu| h^{m-1}. \quad (4.2)$$

b) Es gibt eine von h unabhängige Konstante $M \in \mathbb{N}$, so daß zu jedem $K \in \mathcal{T}_h$, $0 < h \leq 1$, unabhängig von $|\nu| \leq h$ höchstens M verschiedene $\eta \in \Omega_h$ existieren mit $K \cap E_{h,\eta,\nu} \neq \emptyset$.

Beweis zu a) Sei $x \in E_{h,\eta,\nu}$. Dann existiert ein $\tilde{x} \in \text{Tr } \varphi_{h,\eta}$ mit $|x - \tilde{x}| \leq (r+1)|\nu|$, da ein solcher Punkt \tilde{x} auf der Verbindungsstrecke von x mit $x + (r+1)\nu$ liegen muß. Also ist

$$\begin{aligned} |x - \eta| &\leq |x - \tilde{x}| + |\tilde{x} - \eta| \leq (r+1)|\nu| + |\tilde{x} - \eta| \\ &\stackrel{\tilde{x}, \eta \in \text{Tr } \varphi_{h,\eta}}{\leq} (r+1)|\nu| + \text{diam Tr } \varphi_{h,\eta} \stackrel{(3.31)}{\leq} (r+1)|\nu| + 2h \text{diam } \Omega \\ &\leq (r+1 + 2 \text{diam } \Omega)h, \end{aligned}$$

so daß (4.1) z.B. mit der Setzung $C_1 = 2[r+1 + 2 \text{diam } \Omega]$ folgt. Nach Lemma 3.10 existiert jetzt außerdem ein von h , η und ν unabhängiges $M_0 \in \mathbb{N}$, so daß es (höchstens) M_0 verschiedene $K_j \in \mathcal{T}_h$ gibt mit $E_{h,\eta,\nu} \cap K_j \neq \emptyset$, also $E_{h,\eta,\nu} \subset \bigcup_{j=1}^{M_0} K_j$. Ist $x \in K_j$ mit $\text{dist}(x, \partial K_j) > (r+1)|\nu|$, so kann x nicht in $E_{h,\eta,\nu}$ enthalten sein, also ist

$$\text{meas } E_{h,\eta,\nu} \leq \sum_{j=1}^{M_0} \text{meas}\{x \in K_j : \text{dist}(x, \partial K_j) \leq (r+1)|\nu|\} \leq C M_0 |\nu| h^{m-1},$$

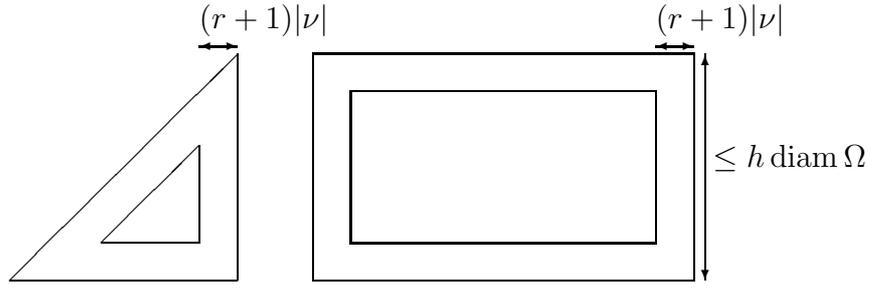
wobei man beachte, daß K_j ein m -Simplex oder ein m -Rechteck mit Kantenlänge $\leq \text{diam } K_j \stackrel{(3.13)}{\leq} h \text{diam } \Omega$ ist (vgl. Abbildung 4.1).

zu b) Sei $K \in \mathcal{T}_h$. Nach (3.13) ist $K \subset S(h \text{diam } \Omega, x)$ für ein $x \in \Omega$. Da nach a) $E_{h,\eta,\nu} \subset S(C_1 h, \eta)$, kann $E_{h,\eta,\nu} \cap K \neq \emptyset$ nur gelten, falls

$$S(C_1 h, \eta) \subset S(h \text{diam } \Omega, x) + S(2C_1 h, 0) = S([\text{diam } \Omega + 2C_1]h, x) =: S_K.$$

Denn sonst gibt es ein $y \in S(C_1 h, \eta)$, $y \notin S_K$, mit

$$\text{dist}(y, K) \geq \text{dist}(y, S(h \text{diam } \Omega, x)) \stackrel{y \notin S_K}{\geq} 2C_1 h. \quad (4.3)$$

Abbildung 4.1: Zur Konstruktion von $E_{h,\eta,\nu}$

Da die offene Menge $S(C_1h, \eta)$ aber den Durchmesser $2C_1h$ hat, gilt für jedes $z \in S(C_1h, \eta)$ und $\tilde{z} \in K$

$$|\tilde{z} - z| \geq |\tilde{z} - y| - |y - z| \stackrel{(4.3)}{\geq} 2C_1h - |y - z| > 0,$$

d.h., $S(C_1h, \eta) \cap K = \emptyset$ und damit $E_{h,\eta,\nu} \cap K = \emptyset$.

Nach Lemma 3.10 existieren aber (höchstens) M_1 verschiedene $K_j \in \mathcal{T}_h$ mit $K_j \cap S_K \neq \emptyset$. Also können nur die $E_{h,\eta,\nu}$ zu $\eta \in \bigcup_{j=1}^{M_1} \mathcal{M}_{K_j,r}$ in S_K liegen, denn ist $\eta \in \Omega_h \setminus \bigcup_{j=1}^{M_1} \mathcal{M}_{K_j,r}$, so ist $\eta \notin S_K$, also $S(C_1h, \eta) \not\subset S_K$ und damit $E_{h,\eta,\nu} \cap K = \emptyset$. Mit $M := M_1 |\mathcal{M}_{K,r}| = M_1 \dim V_K$ folgt b). ■

Damit können wir die folgende Bernstein-Typ-Ungleichung (siehe [70]) beweisen, die in der Numerik auch inverse Ungleichung genannt wird:

Lemma 4.2 (vgl. [70, S.50], [71, S.34]) Seien $\{\mathcal{T}_h : 0 < h \leq 1\}$ eine gleichmäßig reguläre Familie von Triangulierungen des polygonalen Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ durch m -Simplexe und $V_h(r)$ die zugehörigen, durch m -Simplexe vom Grad r erzeugten Ansatzfunktionenräume (siehe (3.19)). Dann existiert eine von $0 < h \leq 1$ und $0 < \delta \leq 1$ unabhängige Konstante C , so daß für alle $v \in V_h(r)$ gilt:

$$\|v\|_{1,\infty,\Omega} \leq Ch^{-1} \|v\|_{C(\bar{\Omega})}, \quad (4.4)$$

$$\omega_1(\delta, v, C(\bar{\Omega})) \leq C\delta h^{-1} \|v\|_{C(\bar{\Omega})}. \quad (4.5)$$

Im L^p -Fall, $1 \leq p < \infty$, läßt sich die Ordnung beim Übergang zum $r+1$ -ten Modul noch etwas verbessern:

$$\omega_{r+1}(\delta, v, L^p(\Omega)) \leq C(\delta h^{-1})^{1+\frac{1}{p}} \|v\|_{L^p(\Omega)}. \quad (4.6)$$

Beweis Ist $\delta \geq h$, so lassen sich die Konstanten in (4.5) bzw. (4.6) zu $C = 2$ bzw. $C = 2^{r+1}$ wählen (vgl. Lemma 2.16d)). Seien also im folgenden $\delta < h$ und $\nu \in \mathbb{R}^m$ mit $|\nu| \leq h$. Wir betrachten wieder die Basis $\{\varphi_{h,\eta} : \eta \in \Omega_h\}$ von $V_h(r)$ (siehe (3.22)). Jedes $\varphi_{h,\eta}$ ist stückweise stetig differenzierbar. Auf jeder Strecke in Ω liegen nur endlich viele

Stellen, an denen $\varphi_{h,\eta}$ nicht differenzierbar ist, nämlich die Übergänge von einem Finiten Element zum nächsten. Damit ist der Mittelwertsatz anwendbar, und wir erhalten für $x \in \overline{\Omega}(\nu)$ bzw. $x \in \Omega((r+1)\nu)$ und $\eta \in \Omega_h$:

$$|\Delta_\nu^1 \varphi_{h,\eta}(x)| \leq |\nu| |\varphi_{h,\eta}|_{1,\infty,\Omega}, \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} |\Delta_\nu^{r+1} \varphi_{h,\eta}(x)| &\stackrel{(2.11)}{=} \left| \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} \Delta_\nu^1 \varphi_{h,\eta}(x + j\nu) \right| \\ &\leq \begin{cases} 2^r |\nu| |\varphi_{h,\eta}|_{1,\infty,\Omega} & \text{für } x \in E_{h,\eta,\nu} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dabei sei $E_{h,\eta,\nu}$ die Menge aus Lemma 4.1. Ist $x \notin E_{h,\eta,\nu}$, so ist die relevante $r+1$ -te Differenz Null, da entweder $\varphi_{h,\eta}$ in allen Punkten der Differenz bereits Null ist, oder die $r+1$ -te Differenz eines Polynoms aus \mathcal{P}_r gebildet wird (denn alle Punkte liegen im Inneren eines Elements, vgl. (2.12)). Außerdem erhalten wir mit den üblichen affinen Transformationen $F_K : \tilde{K} \rightarrow K$, $F_K x = A_K x + b$, von einem Referenzelement \tilde{K} auf die Elemente K der Triangulierung:

$$\begin{aligned} |\varphi_{h,\eta}|_{1,\infty,\Omega} &\stackrel{(3.30)}{=} \max \left\{ |\varphi_{h,\eta}|_{K}|_{1,\infty,K} \stackrel{(3.23)}{=} |\varphi_{K,\eta}|_{1,\infty,K} : K \in \mathcal{T}_h \text{ mit } \eta \in \mathcal{M}_{K,r} \right\} \\ &\stackrel{(3.35)}{\leq} C_1 \max \left\{ \|A_K^{-1}\| |\varphi_{K,F_K F_K^{-1} \eta} \circ F_K|_{1,\infty,\tilde{K}} : K \in \mathcal{T}_h \text{ mit } \eta \in \mathcal{M}_{K,r} \right\} \\ &\stackrel{(3.43),(3.41)}{\leq} C_2 \max \left\{ \frac{\text{diam } \tilde{K}}{\rho(K)} |\varphi_{\tilde{K},F_K^{-1}(\eta)}|_{1,\infty,\tilde{K}} : K \in \mathcal{T}_h \text{ mit } \eta \in \mathcal{M}_{K,r} \right\} \\ &\stackrel{(3.38)}{\leq} C_2 \max_{\eta \in \mathcal{M}_{\tilde{K},r}} |\varphi_{\tilde{K},\eta}|_{1,\infty,\tilde{K}} \max \left\{ \frac{\text{diam } \tilde{K}}{\rho(K)} : K \in \mathcal{T}_h \text{ mit } \eta \in \mathcal{M}_{K,r} \right\} \\ &\stackrel{(3.15)}{\leq} C_3 h^{-1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dabei ist C_3 unabhängig von h und η . Wir haben also:

$$\begin{aligned} \|\Delta_\nu^1 \varphi_{h,\eta}\|_{C(\overline{\Omega}(\nu))} &\stackrel{(4.7)}{\leq} C |\nu| h^{-1}, \quad (4.10) \\ \|\Delta_\nu^{r+1} \varphi_{h,\eta}\|_{L^p(\Omega((r+1)\nu))}^p &\stackrel{(4.8)}{\leq} C_1 \text{meas}(E_{h,\eta,\nu}) (|\nu| |\varphi_{h,\eta}|_{1,\infty,\Omega})^p \\ &\stackrel{(4.9)}{\leq} C_2 \text{meas}(E_{h,\eta,\nu}) (|\nu| h^{-1})^p \stackrel{(4.2)}{=} C_3 |\nu| h^{m-1} (|\nu| h^{-1})^p \\ &= C_3 h^m (|\nu| h^{-1})^{1+p}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Seien jetzt $v \in V_h(r)$ und $x \in \overline{\Omega}(\nu)$. Dann existieren zwei Simplexe $K_1, K_2 \in \mathcal{T}_h$ mit $x \in K_1$, $x + \nu \in K_2$ und (vgl. (3.24), (3.30))

$$v(\tilde{x}) = \sum_{\eta \in \mathcal{M}_{K_1,r} \cup \mathcal{M}_{K_2,r}} v(\eta) \varphi_{h,\eta}(\tilde{x}) \quad \forall \tilde{x} \in K_1 \cup K_2, \quad (4.12)$$

so daß

$$\begin{aligned} |\Delta_\nu^1 v(x)| &= |v(x + \nu) - v(x)| = \left| \sum_{\eta \in \mathcal{M}_{K_1, r} \cup \mathcal{M}_{K_2, r}} [v(\eta)\varphi_{h, \eta}(x + \nu) - v(\eta)\varphi_{h, \eta}(x)] \right| \\ &\leq \sum_{\eta \in \mathcal{M}_{K_1, r} \cup \mathcal{M}_{K_2, r}} |v(\eta)| |\Delta_\nu^1 \varphi_{h, \eta}(x)| \stackrel{(4.10)}{\leq} C \|v\|_{C(\bar{\Omega})} 2(\underbrace{\dim \mathcal{P}_r}_{=|\mathcal{M}_{K, r}|}) |\nu| h^{-1}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Damit ist (4.5) bewiesen. Insbesondere ergibt sich aus (4.9) und (4.12) genauso ($\alpha \in \mathbb{N}_0^m$, $|\alpha| = 1$)

$$|D^\alpha v(x)| \leq \sum_{\eta \in \mathcal{M}_{K_1, r} \cup \mathcal{M}_{K_2, r}} |v(\eta)| |D^\alpha \varphi_{h, \eta}(x)| \leq 2(\dim P_r) \|v\|_{C(\bar{\Omega})} C h^{-1} \quad \text{f.ü.},$$

womit die inverse Ungleichung (4.4) folgt:

$$\|v\|_{1, \infty, \Omega} = \|v\|_{C(\bar{\Omega})} + |v|_{1, \infty, \Omega} \leq (1 + C_1 h^{-1}) \|v\|_{C(\bar{\Omega})} \stackrel{h \leq 1}{\leq} C_2 h^{-1} \|v\|_{C(\bar{\Omega})}.$$

Jetzt zu (4.6): Nach Lemma 4.1b) existiert ein $M \in \mathbb{N}$, so daß zu jedem $K \in \mathcal{T}_h$ unabhängig von h (höchstens) M verschiedene $\eta \in \Omega_h$ existieren mit $E_{h, \eta, \nu} \cap K \neq \emptyset$ (beachte: $|\nu| \leq h$). Damit können wir Lemma 3.16 anwenden:

$$\begin{aligned} \|\Delta_\nu^{r+1} v\|_{L^p(\Omega((r+1)\nu))}^p &\stackrel{(3.24)}{\leq} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{K \cap \Omega((r+1)\nu)} \left| \sum_{\eta \in \Omega_h} v(\eta) \Delta_\nu^{r+1} \varphi_{h, \eta}(x) \right|^p dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{K \cap \Omega((r+1)\nu)} \left| \sum_{\eta \in \Omega_h : E_{h, \eta, \nu} \cap K \neq \emptyset} v(\eta) \Delta_\nu^{r+1} \varphi_{h, \eta}(x) \right|^p dx \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{K \cap \Omega((r+1)\nu)} M^p \max_{\eta \in \Omega_h : E_{h, \eta, \nu} \cap K \neq \emptyset} |v(\eta)|^p |\Delta_\nu^{r+1} \varphi_{h, \eta}(x)|^p dx \\ &\leq M^p \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{K \cap \Omega((r+1)\nu)} \sum_{\eta \in \Omega_h} |v(\eta)|^p |\Delta_\nu^{r+1} \varphi_{h, \eta}(x)|^p dx \\ &= M^p \sum_{\eta \in \Omega_h} |v(\eta)|^p \|\Delta_\nu^{r+1} \varphi_{h, \eta}\|_{L^p(\Omega((r+1)\nu))}^p \\ &\stackrel{(4.11)}{\leq} C_1 (|\nu| h^{-1})^{1+p} \left[\sum_{\eta \in \Omega_h} h^m |v(\eta)|^p \right] \stackrel{(3.45)}{\leq} C_2 (|\nu| h^{-1})^{1+p} \|v\|_{L^p(\Omega)}^p. \end{aligned}$$

■

Auch für die Rechteck-Elemente gilt die Bernstein-Typ-Ungleichung:

Lemma 4.3 *Die offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ habe die Rechteck-Eigenschaft (siehe Definition 2.5). Dann gelten die Aussagen (4.4), (4.5) und (4.6) von Lemma 4.2 auch bei Verwendung von m -Rechtecken vom Grad r oder Serendipity-Elementen.*

Beweis Der Beweis von (4.4) und (4.5) ist identisch. Es ist lediglich beim Nachweis von (4.6) zu beachten, daß jetzt für $x \notin E_{h,\eta,\nu}$ Differenzen der Ordnung $r + 1$ von Polynomen aus \mathcal{P}^r auftreten. Diese verschwinden aber i.a. nur, falls sie partiell entlang den Koordinatenachsen gebildet werden (siehe (2.12), (2.13)). Völlig analog zum Beweis von Lemma 4.2 gilt daher ($1 \leq j \leq m$)

$$\bar{\omega}_{(r+1)e_j}(\delta, v, L^p(\Omega)) \leq C(\delta h^{-1})^{1+\frac{1}{p}} \|v\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall v \in V_h(r).$$

Wegen Lemma 2.24 genügt es jedoch tatsächlich, nur Differenzen in den Richtungen e_j zu betrachten ($\delta \leq 1$):

$$\begin{aligned} \omega_{r+1}(\delta, v, L^p(\Omega)) &\leq C_1 \left[\sum_{j=1}^m \bar{\omega}_{(r+1)e_j}(\delta, v, L^p(\Omega)) + \delta^{r+1} \|v\|_{L^p(\Omega)} \right] \\ &\leq C_2 (\delta h^{-1})^{1+\frac{1}{p}} \|v\|_{L^p(\Omega)} + C_1 \delta^{r+1} \|v\|_{L^p(\Omega)} \\ &\stackrel{\delta, h \leq 1}{\leq} [C_1 + C_2] (\delta h^{-1})^{1+\frac{1}{p}} \|v\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall v \in V_h(r). \end{aligned}$$

■

Folgerung 4.4 (vgl. [71, S.35]) Seien $\{\mathcal{T}_h : 0 < h \leq 1\}$ eine gleichmäßig reguläre Familie von Triangulierungen des polygonalen Gebietes $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ und V_h die zugehörigen Ansatzfunktionenräume, gebildet durch m -Simplexe vom Grad r , m -Rechtecke vom Grad r oder das Serendipity-Element, so daß $V_{h_1} \subset V_{h_2}$ für $0 < h_2 \leq h_1 \leq 1$ (vgl. (3.18)). Bei Verwendung von m -Rechtecken oder Serendipity-Elementen erfülle Ω zusätzlich die Rechteck-Eigenschaft. Weiter sei $\sigma : (0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ monoton wachsend mit $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \sigma(\delta) = 0$ (also z.B. ein abstrakter Stetigkeitsmodul).

a) Ist zusätzlich

$$\int_{\delta}^1 t^{-2} \sigma(t) dt = \mathcal{O}(\delta^{-1} \sigma(\delta)), \quad (4.14)$$

also z.B. $\sigma(t) = t^\nu$, $0 \leq \nu < 1$, so gilt für $u \in C(\bar{\Omega})$ (vgl. Kapitel 3.6, $n \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0+$):

$$\inf_{v \in V_{1/n}} \|u - v\|_{C(\bar{\Omega})} = \mathcal{O}(\sigma(n^{-1})) \implies \omega_1(\delta, u, C(\bar{\Omega})) = \mathcal{O}(\sigma(\delta)). \quad (4.15)$$

b) Ist die Bedingung

$$\int_{\delta}^1 t^{-2-\frac{1}{p}} \sigma(t) dt = \mathcal{O}(\delta^{-1-\frac{1}{p}} \sigma(\delta)) \quad (4.16)$$

erfüllt, also z.B. $\sigma(t) = t^\nu$, $0 \leq \nu < 1 + 1/p$, so ist für $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$:

$$\inf_{v \in V_{1/n}} \|u - v\|_{L^p(\Omega)} = \mathcal{O}(\sigma(n^{-1})) \implies \omega_{r+1}(\delta, u, L^p(\Omega)) = \mathcal{O}(\sigma(\delta)). \quad (4.17)$$

Beweis Wir benutzen Satz 2.33 (und damit ein Teleskop-Argument unter Berücksichtigung der Bernstein-Typ-Ungleichung) für $U_n = V_{1/n}$ und setzen zum Beweis von a)

$$X = C(\overline{\Omega}), \quad \gamma = 1, \quad S_\delta u = \omega_1(\delta, u, C(\overline{\Omega}))$$

sowie für b)

$$X = L^p(\Omega), \quad \gamma = 1 + \frac{1}{p}, \quad S_\delta u = \omega_{r+1}(\delta^{\frac{p}{p+1}}, u, L^p(\Omega)) = \omega_{r+1}(\delta^{\frac{1}{\gamma}}, u, L^p(\Omega)).$$

Dann sind (2.42), (2.44) nach Voraussetzung erfüllt, während (2.43) aus (4.5) und (4.6) folgt:

$$S_{\delta^\gamma} v = \begin{cases} \omega_1(\delta, v, C(\overline{\Omega})) \stackrel{(4.5)}{\leq} C \delta n \|v\|_{C(\overline{\Omega})} & \text{im Fall a)} \\ \omega_{r+1}(\delta, v, L^p(\Omega)) \stackrel{(4.6)}{\leq} C (\delta n)^\gamma \|v\|_{L^p(\Omega)} & \text{im Fall b)} \end{cases} \quad \forall v \in V_{1/n}.$$

Schließlich sind die S_δ nach Lemma 2.16a) bzw. d) gleichgradig bezüglich δ in X^\sim beschränkt. Damit ergeben sich die Aussagen aus (2.45). ■

Wir erhalten damit einen Beitrag zur Schärfe der Fehlerabschätzung (3.99) bei Verwendung von m -Simplexten der Ordnung $r > 1$:

Folgerung 4.5 *Unter den Voraussetzungen und Bezeichnungen von Satz 3.26 bzw. Folgerung 3.28 gelte zusätzlich $V_{h_1} \subset V_{h_2}$, $0 < h_2 \leq h_1 \leq 1$. Sei also $u \in C_0(\overline{\Omega})$ und u_h die zugehörige Lösung der Aufgabe (3.89). Für σ wie in (4.14) und $r > 1$ gilt ($h \rightarrow 0+$, $\delta \rightarrow 0+$):*

$$\|u - u_h\|_{C(\overline{\Omega})} = \mathcal{O}(\sigma(h)) \iff \omega_1(\delta, u, C(\overline{\Omega})) = \mathcal{O}(\sigma(\delta)).$$

Beweis Zu „ \Leftarrow “:

$$\|u - u_h\|_{C(\overline{\Omega})} \stackrel{(3.99)}{\leq} C \omega_{r+1}(h, u, C(\overline{\Omega})) \leq C 2^r \omega_1(h, u, C(\overline{\Omega})) = \mathcal{O}(\sigma(h)).$$

Schließlich folgt die Richtung „ \Rightarrow “ aus (4.15), indem wir speziell $h = 1/n$ wählen und berücksichtigen, daß $\inf_{v \in V_{1/n}} \|u - v\|_{C(\overline{\Omega})} \leq \|u - u_h\|_{C(\overline{\Omega})} = \mathcal{O}(\sigma(n^{-1}))$. ■

Offensichtlich spielt die Randbedingung der Differentialgleichung beim Beweis der Umkehrrichtung keine Rolle, während sie beim Beweis der direkten Sätze berücksichtigt werden muß und zumindest bei der Charakterisierung des K-Funktional Schwierigkeiten bereiten kann (vgl. Bemerkung zu Satz 3.17).

Für den Finite-Elemente-Fehler in der L^2 -Norm liefert (4.17) keinen wesentlichen Beitrag. Denn wegen der Regularität $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ der Lösung u einer Aufgabe (3.5) bei glattem Rand $\partial\Omega$ (vgl. Satz 3.1) gilt sofort

$$\omega_{r+1}(\delta, u, L^2(\Omega)) \leq C \delta^2 \omega_{r-1}^{(2)}(\delta, u, L^2(\Omega)) = o(\delta^2).$$

Jedoch ist z.B. bereits für $\nu > 1 + 1/2$ und $\sigma(\delta) = \delta^\nu$ die Bedingung (4.16) für $p = 2$ verletzt, da die rechte Seite für $\delta \rightarrow 0+$ gegen 0 konvergiert, die linke aber nicht. Damit folgt bei geschachtelten Ansatzfunktionenräumen aus (4.17) nur eine Aussage für die Ritz-Projektion P_h (vgl. (3.79)). Für $0 < \nu < 1/2$ gilt:

$$\|u - P_h u\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(h^{1+\nu}) \implies \omega_{r+1}(\delta, u, L^2(\Omega)) = \mathcal{O}(\delta^{1+\nu}).$$

Das Vorgehen in diesem Abschnitt (und auch in den folgenden) ist eine Reduktion auf den Fehler der besten Approximation. Natürlich erhalten wir so keinen Beitrag zur Diskussion des Finite-Elemente-Fehlers in der Supremum-Norm für lineare Ansatzfunktionen, da der hier auftretende log-Faktor (vgl. Folgerung 3.28) sich nur über Eigenschaften der Differentialgleichung (Green-Funktion) erklären läßt.

4.1.2 Triangulierungen mit Mixing-Bedingungen

Als Voraussetzung für Umkehr- und Saturationsresultate bei der Spline-Approximation sind Mixing-Bedingungen üblich (vgl. [80, Kapitel 6.9], [78], und in Verbindung mit Finite-Elementen siehe [97]). Wir folgen hier der Darstellung von Dahmen, DeVore und Scherer in [24].

Definition 4.6 Sei $\{\mathcal{T}_h : 0 < h \leq 1\}$ eine Familie von Triangulierungen des polygonalen Gebietes Ω durch m -Simplexe. $\{\mathcal{T}_h\}$ erfüllt die ∞ -Mixing-Bedingung, falls Konstanten $0 < c_0, \delta_0 \leq 1$ existieren, so daß es zu jedem $x \in \overline{\Omega}$ und jedem $0 < h \leq \delta_0$ ein $0 < \tilde{h} = \tilde{h}(x, h) \leq h$ und ein $K \in \mathcal{T}_{\tilde{h}}$ gibt mit $x \in K$ und $\text{dist}(x, \mathcal{C}_{\overline{\Omega}}K) \geq c_0 h$.

Man beachte im Hinblick auf Randpunkte von Ω , daß mit $\text{dist}(x, \mathcal{C}_{\overline{\Omega}}K)$ der Abstand von x zum Komplement von K bezüglich $\overline{\Omega}$ betrachtet wird, d.h., Punkte außerhalb von $\overline{\Omega}$ spielen keine Rolle. Die Mixing-Bedingung ist gerade so konstruiert, daß zu einer $r + 1$ -ten Differenz mit genügend kleinem Inkrement stets ein $K \in \bigcup_{0 < h \leq 1} \mathcal{T}_h$ existiert, so daß alle Punkte der Differenz in K liegen. Für ein Polynom aus \mathcal{P}_r ist diese Differenz somit Null (vgl. (2.12)). Damit haben wir die Beweisidee des folgenden Lemmas vorweggenommen.

Lemma 4.7 (vgl. [24]) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein polygonales Gebiet, und die Familie $\{\mathcal{T}_h\}$ der Triangulierungen von Ω erfülle die ∞ -Mixing-Bedingung mit Daten δ_0 und c_0 aus Definition 4.6. Weiter seien $V_h = V_h(r)$ die zugehörigen, durch m -Simplexe vom Grad r erzeugten Ansatzfunktionenräume (vgl. (3.19)). Dann gilt für $\delta \leq \delta_0$ und $u \in C(\overline{\Omega})$:

$$\omega_{r+1}(\delta, u, C(\overline{\Omega})) \leq 2^{r+1} \left(1 + \frac{r+1}{c_0}\right)^{r+1} \sup_{0 < h \leq \delta} \left[\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{C(\overline{\Omega})} \right]. \quad (4.18)$$

Ist insbesondere $\sigma : (0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ eine monoton wachsende Funktion, dann gilt ($\delta \rightarrow 0+$, $h \rightarrow 0+$):

$$\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{C(\overline{\Omega})} = \mathcal{O}(\sigma(h^{r+1})) \implies \omega_{r+1}(\delta, u, C(\overline{\Omega})) = \mathcal{O}(\sigma(\delta^{r+1})), \quad (4.19)$$

$$\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{C(\overline{\Omega})} = o(\sigma(h^{r+1})) \implies \omega_{r+1}(\delta, u, C(\overline{\Omega})) = o(\sigma(\delta^{r+1})). \quad (4.20)$$

Beweis Seien $\delta \leq \delta_0$ und $\nu \in \mathbb{R}^m$ mit $|\nu| \leq c_0\delta/(r+1)$ sowie $x \in \overline{\Omega}((r+1)\nu)$. Dann existieren nach Definition 4.6 ein $\tilde{h} = \tilde{h}(x, \delta) \leq \delta$ und $K \in \mathcal{T}_{\tilde{h}}$, $x \in K$, mit $\text{dist}(x, \mathcal{C}_{\overline{\Omega}}K) \geq c_0\delta \geq (r+1)|\nu|$. Insbesondere sind damit $x, x + (r+1)\nu \in K$. Für jedes $v \in V_{\tilde{h}}$ ist $v|_K \in \mathcal{P}_r(K)$ und damit folgt $\Delta_{\nu}^{r+1}v(x) = 0$ (vgl. (2.12)), also

$$|\Delta_{\nu}^{r+1}u(x)| = |\Delta_{\nu}^{r+1}(u(x) - v(x))| \leq 2^{r+1}\|u - v\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Übergang zum Infimum liefert dann $|\Delta_{\nu}^{r+1}u(x)| \leq 2^{r+1} \inf_{v \in V_{\tilde{h}}} \|u - v\|_{C(\overline{\Omega})}$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \omega_{r+1}(\delta, u, C(\overline{\Omega})) \\ &= \omega_{r+1}\left(\frac{r+1}{c_0} \frac{c_0\delta}{r+1}, u, C(\overline{\Omega})\right) \leq \left(1 + \frac{r+1}{c_0}\right)^{r+1} \omega_{r+1}\left(\frac{c_0\delta}{r+1}, u, C(\overline{\Omega})\right) \\ &\leq 2^{r+1} \left(1 + \frac{r+1}{c_0}\right)^{r+1} \sup_{0 < h \leq \delta} \left[\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{C(\overline{\Omega})} \right], \end{aligned}$$

womit (4.18) bewiesen ist. Wegen der Monotonie von σ folgt dann aber auch sofort (4.19). Aus (4.18) folgt schließlich noch (4.20). Denn zu $\varepsilon > 0$ existiert wegen der linken Seite von (4.20) ein $\delta_1 > 0$, so daß

$$\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{C(\overline{\Omega})} < \varepsilon \sigma(h^{r+1}) \quad \forall h < \delta_1.$$

Damit ist aber für $\delta < \min\{\delta_0, \delta_1\}$ nach (4.18) auch $\omega_{r+1}(\delta, u, C(\overline{\Omega})) \leq C\varepsilon\sigma(\delta^{r+1})$, und da ε beliebig ist, folgt (4.20). \blacksquare

Im Vergleich zum Beweis der Folgerung 4.4 ist das Vorgehen hier wesentlich elementarer, eine Bernstein-Typ-Ungleichung wird nicht benötigt. Dafür wird die ∞ -Mixing-Bedingung voll ausgenutzt, die einen direkten Vergleich zwischen Stetigkeitsmodul und Fehler der besten Approximation zuläßt (vgl. dagegen Folgerung 4.4). Da die Ansatzfunktionen jetzt nicht geschachtelt sind (sonst wäre die Mixing-Bedingung nicht erfüllt), kann nicht

$$\sup_{0 < h \leq \delta} \left[\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{C(\overline{\Omega})} \right] = \inf_{v \in V_{\delta}} \|u - v\|_{C(\overline{\Omega})}$$

geschlossen werden, um eine noch stärkere Umkehrung zu erhalten.

Folgerung 4.8 (vgl. Folgerung 4.5) *Unter den Voraussetzungen der Fehlerschranke in der sup-Norm, d.h. von Folgerung 3.28, sei für die Familie der Triangulierungen von $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ zusätzlich die ∞ -Mixing-Bedingung erfüllt. Sei also $u \in C_0(\overline{\Omega})$ und u_h die zugehörige Lösung der Aufgabe (3.89), sowie $\sigma : (0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ monoton wachsend. Ist $r > 1$ so gilt:*

$$\|u - u_h\|_{C(\overline{\Omega})} = \mathcal{O}(\sigma(h^{r+1})) \quad \iff \quad \omega_{r+1}(\delta, u, C(\overline{\Omega})) = \mathcal{O}(\sigma(\delta^{r+1})).$$

Beweis Die Richtung „ \Leftarrow “ folgt aus (3.99), die umgekehrte wieder aus

$$\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \|u - u_h\|_{C(\bar{\Omega})} = \mathcal{O}(\sigma(h^{r+1}))$$

und (4.19). ■

Ebenso kann die Schärfe der Fehlerabschätzung (3.100) für $s = 1$ gezeigt werden. Ist $u \in C^1(\bar{\Omega})$, so gilt unter Voraussetzung der ∞ -Mixing-Bedingung:

$$\|u - u_h\|_{1,\infty,\Omega} = \mathcal{O}(\sigma(h^r)) \iff \omega_r^{(1)}(\delta, u, C(\bar{\Omega})) = \mathcal{O}(\sigma(\delta^r)).$$

Dazu ist statt (4.18) lediglich die Abschätzung

$$\omega_r^{(1)}(\delta, u, C(\bar{\Omega})) \leq C \sup_{0 < h \leq \delta} \left[\inf_{v \in V_h} |u - v|_{1,\infty,\Omega} \right]$$

zu beweisen: Entsprechend dem Beweis zu Lemma 4.7 seien $\delta \leq \delta_0$, $\nu \in \mathbb{R}^m$ mit $|\nu| \leq c_0\delta/r$, sowie $x \in \bar{\Omega}(r\nu)$. Nach Definition 4.6 existieren wieder ein $\tilde{h} \leq \delta$ und $K \in \mathcal{T}_{\tilde{h}}$, $x \in K$, mit $\text{dist}(x, \mathcal{C}_{\bar{\Omega}}K) \geq c_0\delta \geq r|\nu|$. Für jedes $v \in V_{\tilde{h}}$ ist $v|_K \in \mathcal{P}_r(K)$ und damit $D^\alpha v|_K \in \mathcal{P}_{r-1}(K)$ für $|\alpha| = 1$, so daß¹

$$|\Delta_\nu^r D^\alpha u(x)| = |\Delta_\nu^r D^\alpha(u(x) - v(x))| \leq 2^r |u - v|_{\alpha,\infty,\Omega}.$$

Daraus folgt schließlich:

$$\begin{aligned} \omega_r^{(1)}(\delta, u, C(\bar{\Omega})) &\leq \left(1 + \frac{r}{c_0}\right)^r \omega_r^{(1)}\left(\frac{c_0\delta}{r}, u, C(\bar{\Omega})\right) \\ &= \left(1 + \frac{r}{c_0}\right)^r \sum_{|\alpha|=1} \omega_r\left(\frac{c_0\delta}{r}, D^\alpha u, C(\bar{\Omega})\right) \\ &\leq 2^r \left(1 + \frac{r}{c_0}\right)^r \sum_{|\alpha|=1} \sup_{0 < h \leq \delta} \left[\inf_{v \in V_h} |u - v|_{\alpha,\infty,\Omega} \right] \\ &\leq m 2^r \left(1 + \frac{r}{c_0}\right)^r \sup_{0 < h \leq \delta} \left[\inf_{v \in V_h} |u - v|_{1,\infty,\Omega} \right]. \end{aligned}$$

Die ∞ -Mixing-Bedingung ist nicht geeignet, um eine (4.18) entsprechende Aussage für L^p -Stetigkeitsmoduln zu zeigen. Denn sie verlangt nur, daß bei festem h zu jedem $x \in \bar{\Omega}$ eine Triangulierung $\mathcal{T}_{\tilde{h}}$, $\tilde{h} = \tilde{h}(x, h)$, existiert, die den entsprechenden Bedingungen der Definition 4.6 genügt. Das heißt, zu festem h gibt es evtl. überabzählbar viele solcher Triangulierungen $\mathcal{T}_{\tilde{h}}$. Wollen wir das Argument des Beweises von Lemma 4.7 auf L^p -Moduln übertragen, müssen wir die in der Definition des Moduls auftretenden Integrale über Differenzen dagegen in endlich viele Teilintegrale aufspalten. Dies führt zur folgenden Verschärfung der ∞ -Mixing-Bedingung.

¹Beachte: $D^\alpha u$ existiert auch auf $\partial\Omega$ als eindeutige stetige Fortsetzung, vgl. Kapitel 2.1.1.

Definition 4.9 (vgl. [24], vgl. Definition 4.6) Sei $\{\mathcal{T}_h : 0 < h \leq 1\}$ eine Familie von Triangulierungen des polygonalen Gebietes Ω durch m -Simplexe oder m -Rechtecke. $\{\mathcal{T}_h\}$ erfüllt die L^p -Mixing-Bedingung, falls Konstanten $0 < c_0, \delta_0 \leq 1$ und $N_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so daß es zu jedem $0 < h \leq \delta_0$ Zahlen $0 < \tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_n \leq h, n = n(h) \leq N_0$, und für jedes $x \in \Omega$ ein $1 \leq j \leq n$ gibt mit $x \in K \in \mathcal{T}_{\tilde{h}_j}$ und $\text{dist}(x, \mathcal{C}_{\overline{\Omega}}K) \geq c_0 h$.

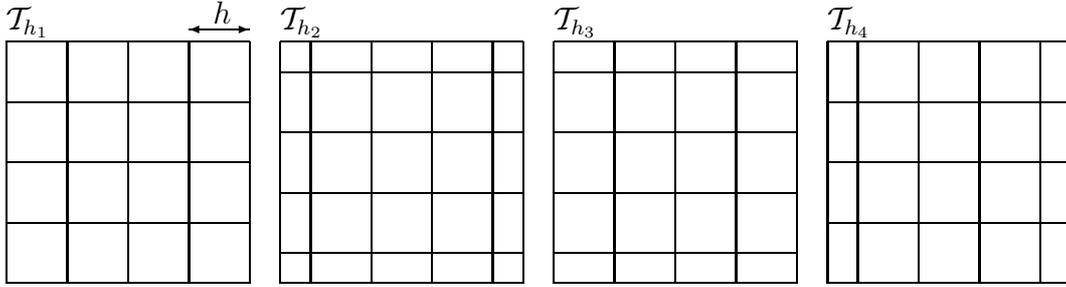


Abbildung 4.2: Beispiel zur L^p -Mixing-Bedingung: Zu jedem $x \in \Omega$ existiert ein $h_j, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, mit $x \in K \in \mathcal{T}_{h_j}$ und $\text{dist}(x, \mathcal{C}_{\overline{\Omega}}K) \geq h/4$.

Für die Spline-Approximation in einer Dimension wird in [79] (vgl. [80, S.256]) die Σ -Mixing-Bedingung eingeführt, die wesentlich schwächer als die L^p -Bedingung ist. Damit werden Umkehrsätze wieder mittels Halbnormen gezeigt (vgl. [28]), die die Sprünge der Ableitungen der Splines an den Knoten aufsummieren. Das Vorgehen läßt sich aber nicht gut auf höhere Dimensionen übertragen, da hier die Mengen der Sprungstellen viel komplizierter sind (vgl. [24]).

Lemma 4.10 (vgl. [24], vgl. Lemma 4.7) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein polygonales Gebiet, und die Familie $\{\mathcal{T}_h\}$ der Triangulierungen von Ω erfülle die L^p -Mixing-Bedingung mit den Daten δ_0, c_0 und N_0 aus Definition 4.9. Weiter sei $V_h = V_h(r)$ wie in (3.19). Dann gilt für $\delta \leq \delta_0$ und $u \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$:

a) Bei Verwendung von m -Simplexten vom Grad r ist

$$\omega_{r+1}(\delta, u, L^p(\Omega)) \leq 2^{r+1} N_0 \left(1 + \frac{r+1}{c_0}\right)^{r+1} \sup_{0 < h \leq \delta} \left[\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{L^p(\Omega)} \right]. \quad (4.21)$$

Außerdem gelten zu (4.19) und (4.20) analoge Aussagen.

b) Genügt Ω der Rechteck-Eigenschaft, so ist bei Verwendung von m -Rechtecken vom Grad r oder Serendipity-Elementen (vom Grad $r = 2$):

$$\omega_{r+1}(\delta, u, L^p(\Omega)) \leq C \left[\sup_{0 < h \leq \delta} \left[\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{L^p(\Omega)} \right] + \delta^{r+1} \|u\|_{L^p(\Omega)} \right]. \quad (4.22)$$

Erfüllt die monoton wachsende Funktion σ zusätzlich $\delta = \mathcal{O}(\sigma(\delta))$ ($\delta \rightarrow 0+$), so gilt auch hier eine zu (4.19) analoge Aussage. (Allerdings läßt sich wegen des zusätzlichen Terms $\delta^{r+1} \|u\|_{L^p(\Omega)}$ jetzt keine zu (4.20) analoge Aussage zeigen.)

Beweis zu a) Seien zunächst $\{\mathcal{T}_h\}$ Triangulierungen durch m -Simplexe. Zu $(h =) \delta \leq \delta_0$ seien $\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_n \leq \delta$, $n = n(\delta)$, wie in Definition 4.9. Sei

$$\begin{aligned} \Omega_j &:= \{x \in \Omega : \exists K \in \mathcal{T}_{\tilde{h}_j} \text{ mit } x \in K \text{ und } \text{dist}(x, \mathcal{C}_{\overline{\Omega}}K) \geq c_0\delta\} \\ &= \left(\bigcup_{K \in \mathcal{T}_{\tilde{h}_j}} \underbrace{\{x \in K : \text{dist}(x, \mathcal{C}_{\overline{\Omega}}K) \geq c_0\delta\}}_{\text{kompakt, da } K \text{ kompakt}} \right) \cap \Omega. \end{aligned}$$

Dann ist $\Omega = \bigcup_{j=1}^n \Omega_j$ und die einzelnen Ω_j sind als Schnitt der offenen Menge Ω mit einer endlichen Vereinigung kompakter Mengen Lebesgue-meßbar. Für $|\nu| \leq c_0\delta/(r+1)$ gilt jetzt mit der Dreiecksungleichung:

$$\|\Delta_\nu^{r+1}u\|_{L^p(\Omega((r+1)\nu))} \leq \sum_{j=1}^n \|\Delta_\nu^{r+1}u\|_{L^p(\Omega_j \cap \Omega((r+1)\nu))}.$$

Für $v \in V_{\tilde{h}_j}$ und $x \in \Omega_j \cap \Omega((r+1)\nu)$ ist $\Delta_\nu^{r+1}v(x) = 0$ und

$$\begin{aligned} \|\Delta_\nu^{r+1}u\|_{L^p(\Omega_j \cap \Omega((r+1)\nu))} &= \inf_{v \in V_{\tilde{h}_j}} \|\Delta_\nu^{r+1}(u - v)\|_{L^p(\Omega_j \cap \Omega((r+1)\nu))} \\ &\leq 2^{r+1} \inf_{v \in V_{\tilde{h}_j}} \|u - v\|_{L^p(\Omega)} \leq 2^{r+1} \sup_{0 < h \leq \delta} \left[\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{L^p(\Omega)} \right], \end{aligned}$$

also

$$\|\Delta_\nu^{r+1}u\|_{L^p(\Omega((r+1)\nu))} \leq \underbrace{n(\delta)}_{\leq N_0} 2^{r+1} \sup_{0 < h \leq \delta} \left[\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{L^p(\Omega)} \right].$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \omega_{r+1}(\delta, u, L^p(\Omega)) &\leq \left(1 + \frac{r+1}{c_0}\right)^{r+1} \omega_{r+1}\left(\frac{c_0\delta}{r+1}, u, L^p(\Omega)\right) \\ &\leq N_0 \left(1 + \frac{r+1}{c_0}\right)^{r+1} 2^{r+1} \sup_{0 < h \leq \delta} \left[\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{L^p(\Omega)} \right]. \end{aligned}$$

Die weiteren Aussagen folgen wie im Beweis zu Lemma 4.7.

zu b) Werden m -Rechtecke bzw. Serendipity-Elemente benutzt, so betrachten wir analog zu Lemma 4.3 wieder nur $r+1$ -te Differenzen entlang den Koordinatenachsen unter Verwendung von Satz 2.23. Dabei erhalten wir durch Satz 2.23 zusätzlich den Term $\delta^{r+1}\|u\|_{L^p(\Omega)}$. ■

Folgerung 4.11 *Zu den Voraussetzungen der L^2 -Fehlerabschätzung in Satz 3.17a) sei zusätzlich die L^p -Mixing-Bedingung erfüllt. Sei also u die Lösung einer Aufgabe (3.5) und u_h die zugehörige Approximation gemäß (3.49). Weiter sei wieder $\sigma : (0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ eine monoton wachsende Funktion, die zusätzlich die Bedingungen $(\delta \rightarrow 0+)$*

$$\int_0^\delta \frac{\sigma(t)}{t} dt = \mathcal{O}(\sigma(\delta)), \quad \delta = \mathcal{O}(\sigma(\delta)) \quad (4.23)$$

erfüllt (also z.B. $\sigma(\delta) = \delta^\nu$, $0 < \nu \leq 1$). Dann gelten die Äquivalenzen ($r > 1$):

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(h^2\sigma(h^{r-1})) \iff \omega_{r-1}^{(2)}(\delta, u, L^2(\Omega)) = \mathcal{O}(\sigma(\delta^{r-1})), \quad (4.24)$$

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} = \mathcal{O}(h\sigma(h^{r-1})) \iff \omega_{r-1}^{(2)}(\delta, u, L^2(\Omega)) = \mathcal{O}(\sigma(\delta^{r-1})). \quad (4.25)$$

Beweis Nach Satz 3.17a) bleiben nur die Richtungen „ \Rightarrow “ zu beweisen. Wegen (3.51) (vgl. (3.79)) folgt aus der linken Seite von (4.25)

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} = \mathcal{O}(h^2\sigma(h^{r-1})),$$

und wir können uns auf den Beweis von (4.24) beschränken. Nach (4.21) und (4.22) haben wir (vgl. (4.19))

$$\begin{aligned} \omega_{r+1}(\delta, u, L^2(\Omega)) &\leq C \sup_{0 < h \leq \delta} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} + C\delta^{r+1}\|u\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(\delta^2\sigma(\delta^{r-1}) + \delta^{r+1}) \\ &\stackrel{(4.23)}{=} \mathcal{O}(\delta^2\sigma(\delta^{r-1})) \end{aligned} \quad (4.26)$$

und können jetzt (2.15) benutzen, so daß wir für hinreichend kleines δ erhalten:

$$\begin{aligned} \omega_{r-1}^{(2)}(\delta, u, L^2(\Omega)) &\stackrel{(2.15)}{\leq} C_1 \int_0^\delta y^{-3} \omega_{r+1}(y, u, L^2(\Omega)) dy \\ &\stackrel{(4.26)}{\leq} C_2 \int_0^\delta y^{-1} \sigma(y^{r-1}) dy \stackrel{t=y^{r-1}}{=} \frac{C_2}{r-1} \int_0^{\delta^{r-1}} t^{-\frac{1}{r-1}} \sigma(t) t^{-\frac{r-2}{r-1}} dt \\ &= \frac{C_2}{r-1} \int_0^{\delta^{r-1}} \frac{\sigma(t)}{t} dt \stackrel{(4.23)}{=} \mathcal{O}(\sigma(\delta^{r-1})). \end{aligned}$$

■

Als direkte Konsequenz des bislang Gezeigten ergibt sich ein Beitrag zur Saturation:

Folgerung 4.12 (vgl. [24]) *Unter den Voraussetzungen von Folgerung 4.8 bzw. 4.11 gilt bei Verwendung von m -Simplexen vom Grad $r > 1$:*

- Ist $u \in C_0(\overline{\Omega})$ und u_h die zugehörige Lösung von (3.89) und gilt $\|u - u_h\|_{C(\overline{\Omega})} = o(h^{r+1})$, dann ist $u \in \mathcal{P}_r(\overline{\Omega})$.
- Ist u Lösung von (3.5) und u_h die zugehörige von (3.49) und gilt $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = o(h^{r+1})$ oder $\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} = o(h^r)$, dann stimmt u f.ü. mit einem Polynom aus $\mathcal{P}_r(\overline{\Omega})$ überein.

Beweis Nach (4.20) bzw. Lemma 4.10a) folgt jeweils (beachte: $\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} = o(h^r) \stackrel{(3.51)}{\implies} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = o(h^{r+1})$)

$$\omega_{r+1}(\delta, u, C(\overline{\Omega})) = o(\delta^{r+1}) \text{ bzw. } \omega_{r+1}(\delta, u, L^2(\Omega)) = o(\delta^{r+1}).$$

Damit folgen die Aussagen aus Lemma 2.22. ■

4.2 Gegenbeispiele: L^2 -und Supremum-Normen

Bei geschachtelten Ansatzfunktionenräumen sind Umkehrsätze nicht das richtige Instrument, die Schärfe der Fehlerschranken Satz 3.17 und Folgerung 3.28 nachzuweisen, da die Regularität der Lösungen die Ordnung der Bernstein-Typ-Ungleichung übersteigt und Mixing-Bedingungen nicht erfüllt sind. Daher werden wir jetzt die Existenz von Lösungen u zeigen, für die die Ordnungen der intermediären Fehlerschranken bestmöglich sind. Dabei werden keine zusätzlichen Voraussetzungen an die Triangulierungen wie z.B. Mixing-Bedingungen benötigt. Statt nach Lösungsfunktionen u zu suchen, über die dann auch eine Inhomogenität f festgelegt ist, könnte man auch direkt nach geeigneten Inhomogenitäten f suchen, die dann u festlegen. Wir stellen aber die Lösungen u in den Mittelpunkt, da die Fehlerabschätzungen über diese - und nicht über f - formuliert sind. Um z.B. die Schärfe der Fehlerschranke (3.52), also von

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2\omega_{r-1}^{(2)}(h, u, L^2(\Omega)),$$

zu zeigen, beweisen wir zu jedem abstrakten Stetigkeitsmodul ω (vgl. (2.23)) die Existenz eines Gegenbeispiels u_ω mit $(h, \delta \rightarrow 0+)$

$$\omega_{r-1}^{(2)}(\delta, u_\omega, L^2(\Omega)) = \mathcal{O}(\omega(\delta^{r-1})),$$

für das sich die Ordnung des Fehlers nicht günstiger verhält als die rechte Seite der Fehlerschranke, also (vgl. Satz 4.14a))

$$\|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{L^2(\Omega)} \neq o(h^2\omega(h^{r-1})).$$

Das ist im Vergleich zu Umkehrsätzen ein völlig anderer Aussagetyt, was sich insbesondere auch darin zeigt, daß an die abstrakten Stetigkeitsmoduln im folgenden keine asymptotischen Bedingungen wie in (4.14) oder in (4.16) gestellt werden müssen. Allerdings werden wir bei der Konstruktion der Gegenbeispiele zwischen den Fällen $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$, d.h. (2.24), und $\omega(\delta) = \delta$ unterscheiden, die komplementär zueinander sind. Im ersten Fall wird die Existenz der Gegenbeispiele jetzt und in den folgenden Kapiteln mit quantitativen Resonanzprinzipien gezeigt (vgl. Kapitel 2.4), während die Beispiele im zweiten Fall explizit angegeben werden.

4.2.1 Der Fall $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$

Die für die Fehlerschranken in Satz 3.17 zu konstruierenden Gegenbeispiele sollen Lösungen der Aufgabe (3.5) sein. Dabei stellt sich zunächst die Frage, welche Funktionen dafür überhaupt in Frage kommen. Nach Satz 3.1 ist (bei konvexem Ω) jede Lösung in $W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$. Andererseits:

Lemma 4.13 *Die beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ habe einen Lipschitz-Rand. Für die Koeffizienten der Bilinearform (3.4) gelte $a_{\alpha,\beta} \in L^\infty(\Omega)$ und zusätzlich² $a_{\alpha,\beta} \in C^1(\overline{\Omega})$ falls $|\beta| = 1$. Dann läßt sich jede Funktion $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ als Lösung einer Aufgabe (3.5) mit Inhomogenität*

$$f = f_u = \sum_{|\alpha| \leq 1} a_{\alpha,0} D^\alpha u - \sum_{|\alpha| \leq 1, |\beta|=1} D^\beta (a_{\alpha,\beta} D^\alpha u) \in L^2(\Omega), \quad (4.27)$$

auffassen, also $a(u, v) = (f_u, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Beweis Für $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ und $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt mit Satz 2.12:

$$\begin{aligned} a(u, v) &\stackrel{(3.4)}{=} \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} a_{\alpha,0}(x) (D^\alpha u(x)) v(x) dx + \sum_{|\alpha| \leq 1, |\beta|=1} \int_{\Omega} (a_{\alpha,\beta}(x) D^\alpha u(x)) D^\beta v(x) dx \\ &\stackrel{(2.7)}{=} \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} a_{\alpha,0}(x) (D^\alpha u(x)) v(x) dx - \sum_{|\alpha| \leq 1, |\beta|=1} \int_{\Omega} D^\beta (a_{\alpha,\beta}(x) D^\alpha u(x)) v(x) dx \\ &= (f_u, v)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

■

Die Menge der Funktionen, die Lösung einer Aufgabe (3.5) sind, ist also genau $W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$, so daß wir in dieser Menge nach Gegenbeispielen suchen. Beim Nachweis der Schärfe der Folgerung 3.28 sind wegen der Formulierung der diskreten Aufgabe (3.89) alle Funktionen aus $C_0(\overline{\Omega})$ als Gegenbeispiele erlaubt. Zunächst zum Fehler in der L^2 -Norm:

Satz 4.14 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ polygonal und $V_h = V_h(r)$, $0 < h \leq 1$, die zu einer gleichmäßig regulären Familie von Triangulierungen durch m -Simplexe vom Grad r , m -Rechtecke vom Grad r oder das Serendipity Element (vom Grad $r = 2$) erzeugten Ansatzfunktionenräume (siehe (3.19)). Für die Bilinearform a aus (3.4) gelte neben $a_{\alpha,\beta} \in L^\infty(\Omega)$ zusätzlich, daß $a_{\alpha,\beta} \in C^1(\overline{\Omega})$ für $|\beta| = 1$.*

a) (vgl. Satz 3.17a)) *Ist $r > 1$, so existiert zu jedem abstrakten Stetigkeitsmodul ω mit $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$ ein Gegenbeispiel $u_\omega \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$, das nach Lemma 4.13 Lösung einer Aufgabe (3.5) ist, so daß $(\delta \rightarrow 0+, h \rightarrow 0+)$*

$$\omega_{r-1}^{(2)}(\delta, u_\omega, L^2(\Omega)) = \mathcal{O}(\omega(\delta^{r-1})), \quad (4.28)$$

aber andererseits

$$\|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{L^2(\Omega)} \neq o(h^2 \omega(h^{r-1})). \quad (4.29)$$

Dabei ist $(u_\omega)_h \in V_h$ die zu u_ω gehörende Lösung von (3.49). Also ist die Fehler-schranke (3.52) (und mit Satz 2.19 auch (3.51)) scharf.

²Damit ist $a_{\alpha,\beta}$ für $|\alpha| = |\beta| = 1$ insbesondere Lipschitz-stetig, vgl. Kapitel 3.1.

- b) (vgl. Satz 3.17b)) Ist $s \geq 2$ und $r \geq s$, so existiert zu jedem abstrakten Stetigkeitsmodul ω mit $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$ ein Gegenbeispiel $u_\omega \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{s,2}(\Omega)$, so daß $(\delta \rightarrow 0+, h \rightarrow 0+)$

$$\omega_{r+1-s}^{(s)}(\delta, u_\omega, L^2(\Omega)) = \mathcal{O}(\omega(\delta^{r+1-s})), \quad (4.30)$$

aber andererseits

$$\|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{1,2,\Omega} \neq o(h^{s-1}\omega(h^{r+1-s})), \quad (4.31)$$

d.h., die Fehlerschranke (3.54) (und damit auch (3.53)) ist scharf.

Die Einschränkung $s \geq 2$ in b) kann zu $s \in \mathbb{N}$ aufgehoben werden, wenn man nicht verlangt, daß das Gegenbeispiel Lösung einer Aufgabe (3.5) ist, d.h. wenn man den Fehler der Ritz-Projektion P_h betrachtet. Analog zu Satz 4.14 gilt für den Fehler in der sup-Norm:

Satz 4.15 (vgl. Folgerung 3.28) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein konvexes, polygonales Gebiet, $a(u, v) = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx$ wie in (3.87), $0 \leq s \leq r$ und $V_h = V_h(r)$, $0 < h \leq 1$, die zu einer gleichmäßig regulären Familie von Triangulierungen durch m -Simplexe vom Grad r erzeugten Ansatzfunktionenräume.

- a) Ist $r > 1$, so existiert zu jedem abstrakten Stetigkeitsmodul ω mit $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$ ein Gegenbeispiel $u_\omega \in C_0(\bar{\Omega}) \cap C^s(\bar{\Omega})$, so daß

$$\omega_{r+1-s}^{(s)}(\delta, u_\omega, C(\bar{\Omega})) = \mathcal{O}(\omega(\delta^{r+1-s})), \quad (4.32)$$

aber andererseits

$$\|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{C(\bar{\Omega})} \neq o(h^s \omega(h^{r+1-s})). \quad (4.33)$$

Dabei ist $(u_\omega)_h$ die zu u_ω gehörende Lösung von (3.89). Das heißt, die Fehlerschranke (3.101) (und mit Satz 2.19 damit auch (3.95)) ist scharf für $r > 1$.

- b) Ist $1 \leq s \leq r$, so existiert zu jedem abstrakten Stetigkeitsmodul ω mit $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$ ein Gegenbeispiel $u_\omega \in C_0(\bar{\Omega}) \cap C^s(\bar{\Omega})$, so daß

$$\omega_{r+1-s}^{(s)}(\delta, u_\omega, C(\bar{\Omega})) = \mathcal{O}(\omega(\delta^{r+1-s})), \quad (4.34)$$

aber andererseits

$$\|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{1,\infty,\Omega} \neq o(h^{s-1}\omega(h^{r+1-s})), \quad (4.35)$$

d.h., die Fehlerschranke (3.100) (und mit Satz 2.19 damit auch (3.96)) ist scharf für $r \geq 1$.

Zum Beweis der beiden Sätze schätzen wir wie in Kapitel 4.1 den Fehler nach unten gegen einen Fehler der besten Approximation ab. Dagegen werden wir erst bei der Konstruktion von Gegenbeispielen zu den Fehlerabschätzungen in negativen Normen und in Verbindung mit Superkonvergenz die Eigenschaften der schwachen Aufgabe und ihrer Diskretisierung wirklich benutzen. Diese benötigen wir insbesondere auch zur Untersuchung des log-Faktors bei linearen Finite Elementen ($r = 1$) in der sup-Norm-Abschätzung (siehe (3.99)). Dieser Fall ist in Satz 4.15a) nicht berücksichtigt und wird in Kapitel 4.4 ausgelagert. Das wesentliche Hilfsmittel wird dort die diskrete Green-Funktion eines zum Finite-Elemente-Ansatz passenden Differenzenverfahrens sein.

Diskrete Green-Funktionen zu Finite-Elemente-Verfahren (siehe [20, 22]) sind als Elemente des Ansatzfunktionenraums V_h definiert, während diskrete Green-Funktionen bei Differenzenverfahren Gitterfunktionen sind. Bei Differenzenverfahren ist auch der Fehler eine Gitterfunktion und er läßt sich über diskrete Green-Funktionen darstellen. Dies ist dort grundlegend beim Schärfenachweis von Fehlerschranken (vgl. [11, 13, 14, 15] für gewöhnliche und [12, 42, 43, 44, 67, 68] für partielle Differentialgleichungen, vgl. auch Kapitel 4.4 und Anhang B.1). Dagegen ist der Finite-Elemente-Fehler $u - u_h$ nicht im Ansatzfunktionenraum, so daß sich die diskreten Green-Funktionen hier nicht für eine Fehlerdarstellung eignen.

Zum Beweis der Sätze 4.14 und 4.15 treffen wir zunächst einige Vorbereitungen, die wir benötigen, um Satz 2.30 anzuwenden.

Lemma 4.16 *Zu jedem m -Rechteck und jedem m -Simplex K existiert eine Funktion $\tilde{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $\text{Tr } \tilde{g} \subset K$ und $D^\alpha \tilde{g} \neq 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$.*

Beweis Ist K ein m -Simplex, so liegt in K insbesondere ein m -Rechteck, so daß wir nur m -Rechtecke betrachten müssen. Sei also $K = \prod_{j=1}^m [a_j, b_j]$. Die Funktion \tilde{f} , definiert durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{1-x^2}\right), & \text{für } |x| < 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist in $C^\infty(\mathbb{R})$ und erfüllt $\text{Tr } \tilde{f} \subset [-1, 1]$, sowie $\tilde{f}^{(j)} \neq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$. Damit genügt

$$\tilde{g}(x) := \prod_{j=1}^m \tilde{f}\left(-1 + \frac{2(x_j - a_j)}{b_j - a_j}\right)$$

den Bedingungen des Lemmas. ■

Für die im Beweis zu $K = \prod_{j=1}^m [a_j, b_j]$ konstruierte Funktion \tilde{g} gilt insbesondere ($\alpha \in \mathbb{N}_0^m$)

$$|\tilde{g}|_{\alpha, K} = \prod_{j=1}^m \left[\frac{2}{b_j - a_j} \right]^{\alpha_j} \left\| \prod_{j=1}^m \tilde{f}^{(\alpha_j)} \left(-1 + \frac{2(x_j - a_j)}{b_j - a_j} \right) \right\|_{C(K)}$$

$$= \prod_{j=1}^m \left[\frac{2}{b_j - a_j} \right]^{\alpha_j} \left\| \prod_{j=1}^m \tilde{f}^{(\alpha_j)} \right\|_{C[-1,1]^m} =: C_\alpha \prod_{j=1}^m \left[\frac{2}{b_j - a_j} \right]^{\alpha_j} > 0, \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} |\tilde{g}|_{\alpha,2,K} &= \prod_{j=1}^m \left[\frac{2}{b_j - a_j} \right]^{\alpha_j} \left[\int_K \prod_{j=1}^m \left[\tilde{f}^{(\alpha_j)} \left(-1 + \frac{2(x_j - a_j)}{b_j - a_j} \right) \right]^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \prod_{j=1}^m \left[\frac{2}{b_j - a_j} \right]^{\alpha_j} \left[\prod_{j=1}^m \left[\frac{b_j - a_j}{2} \int_{-1}^1 (\tilde{f}^{(\alpha_j)}(t))^2 dt \right] \right]^{\frac{1}{2}} \\ &=: C_\alpha \prod_{j=1}^m \left[\frac{2}{b_j - a_j} \right]^{\alpha_j} \sqrt{\prod_{j=1}^m \frac{b_j - a_j}{2}} > 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

wobei die Konstanten von K unabhängig sind.

Lemma 4.17 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ polygonal, $\{\mathcal{T}_h : 0 < h \leq 1\}$ eine Familie gleichmäßig regulärer Triangulierungen und V_h die zugehörigen Ansatzfunktionenräume, erzeugt durch m -Simplexe vom Grad r , m -Rechtecke vom Grad r oder das Serendipity-Element. Dann existieren eine Folge $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $\text{Tr } \tilde{g}_n \subset \overline{\Omega}$ und Konstanten $0 < c, C < \infty$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt ($j \in \mathbb{N}_0$):*

$$|\tilde{g}_n|_{j,\overline{\Omega}} \leq Cn^j \quad (4.38)$$

$$|\tilde{g}_n|_{j,2,\Omega} \leq Cn^{j-\frac{m}{2}} \quad (4.39)$$

$$\inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{C(\overline{\Omega})} \geq c \quad (4.40)$$

$$\inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{1,\infty,\Omega} \geq cn \quad (4.41)$$

$$\inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{k,2,\Omega} \geq cn^{k-\frac{m}{2}}, \quad k \in \{0, 1\}. \quad (4.42)$$

Beweis Sei \tilde{K} ein Referenzelement für die Familie $\{\mathcal{T}_h\}$ und $F_K : K \rightarrow \tilde{K}$, $F_K x = A_K x + b$, die affine Transformation von $K \in \bigcup_{0 < h \leq 1} \mathcal{T}_h$ auf \tilde{K} . Nach Lemma 4.16 existiert eine Funktion $\tilde{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $\text{Tr } \tilde{g} \subset K$ und $D^\alpha \tilde{g} \neq 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$. Insbesondere ist damit \tilde{g} kein Polynom und damit nicht in dem endlich-dimensionalen (und somit abgeschlossenen) $V_{\tilde{K}}$. Es existiert also ein $c_0 > 0$ mit

$$\inf_{v \in V_{\tilde{K}}} \|\tilde{g} - v\|_X \geq c_0 > 0 \quad (4.43)$$

für $X = C(\overline{\Omega})$, $W^{1,\infty}(\Omega)$, $L^2(\Omega)$ bzw. $W^{1,2}(\Omega)$. Sei nun $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge Finiter Elemente mit $K_n \in \mathcal{T}_{1/n}$. Wir gewinnen die Folge $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch affine Transformation von \tilde{g} auf die Elemente K_n , so daß sich alle gewünschten Eigenschaften ergeben. Wir setzen also für $n \in \mathbb{N}$:

$$\tilde{g}_n(x) := \begin{cases} \tilde{g} \circ F_{K_n}(x), & \text{für } x \in K_n \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $\text{Tr } \tilde{g} \subset \tilde{K}$, ist $\text{Tr } \tilde{g}_n \subset K_n \subset \overline{\Omega}$, also $\tilde{g}_n \in C_0(\overline{\Omega})$, und \tilde{g}_n ist beliebig oft differenzierbar.

$$\begin{aligned} |\tilde{g}_n|_{j,\overline{\Omega}} &= |\tilde{g}_n|_{j,K_n} \stackrel{(3.34)}{\leq} C_1 \|A_{K_n}\|^j |\tilde{g}|_{j,\tilde{K}} \stackrel{(3.42)}{\leq} C_1 \left[\frac{\text{diam } \tilde{K}}{\rho(K_n)} \right]^j |\tilde{g}|_{j,\tilde{K}} \\ &\stackrel{(3.15)}{\leq} C_2 n^j |\tilde{g}|_{j,\tilde{K}} = C_3 n^j. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\tilde{g}_n|_{j,2,\Omega} &= |\tilde{g}_n|_{j,2,K_n} \stackrel{(3.34)}{\leq} C_1 \|A_{K_n}\|^j |\det A_{K_n}|^{-\frac{1}{2}} |\tilde{g}|_{j,2,\tilde{K}} \\ &\stackrel{(3.42),(3.44)}{\leq} C_1 \left[\frac{\text{diam } \tilde{K}}{\rho(K_n)} \right]^j \left[\frac{\text{meas } \tilde{K}}{\text{meas } K_n} \right]^{-\frac{1}{2}} |\tilde{g}|_{j,2,\tilde{K}} \\ &\stackrel{(3.15),(3.16)}{\leq} C_2 n^j [n^m]^{-\frac{1}{2}} |\tilde{g}|_{j,2,\tilde{K}} = C_3 n^{j-\frac{m}{2}}. \end{aligned}$$

Nach (3.19) ist $V_{1/n}|_{K_n} = V_{K_n}$, falls $K_n \subset \text{int } \Omega$. Ist $K_n \cap \partial\Omega \neq \emptyset$, so gilt dagegen nur $V_{1/n}|_{K_n} \subset V_{K_n}$, da bei $V_{1/n}$ zusätzlich die Randbedingung $v = 0$ auf $\partial\Omega$, $v \in V_{1/n}$, erfüllt sein muß. In jedem Fall erhalten wir durch die Verwendung des Infimums:

$$\begin{aligned} \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{C(\overline{\Omega})} &\geq \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{C(K_n)} \geq \inf_{\hat{v} \in V_{K_n}} \|\tilde{g}_n - \hat{v}\|_{C(K_n)} \\ &\stackrel{(3.40)}{=} \inf_{\tilde{v} \in V_{\tilde{K}}} \|\tilde{g}_n - \tilde{v} \circ F_{K_n}\|_{C(K_n)} \\ &\stackrel{(3.35)}{\geq} c_1 \inf_{\tilde{v} \in V_{\tilde{K}}} \|\tilde{g} - \tilde{v}\|_{C(\tilde{K})} \stackrel{(4.43)}{\geq} c_1 c_0 > 0. \end{aligned}$$

Entsprechend gilt für den Fehler der besten Approximation in der $W^{1,\infty}$ -Norm:

$$\begin{aligned} \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{1,\infty,\Omega} &\geq \inf_{\hat{v} \in V_{K_n}} \|\tilde{g}_n - \hat{v}\|_{1,\infty,K_n} \stackrel{(3.40)}{=} \inf_{\tilde{v} \in V_{\tilde{K}}} \|\tilde{g}_n - \tilde{v} \circ F_{K_n}\|_{1,\infty,K_n} \\ &\stackrel{(3.35)}{\geq} c_1 \|A_{K_n}^{-1}\|^{-1} \inf_{\tilde{v} \in V_{\tilde{K}}} \|\tilde{g} - \tilde{v}\|_{1,\infty,\tilde{K}} \\ &\stackrel{(3.43)}{\geq} c_1 \frac{\rho(\tilde{K})}{\text{diam } K_n} \inf_{\tilde{v} \in V_{\tilde{K}}} \|\tilde{g} - \tilde{v}\|_{1,\infty,\tilde{K}} \\ &\stackrel{(3.15)}{\geq} c_2 n \inf_{\tilde{v} \in V_{\tilde{K}}} \|\tilde{g} - \tilde{v}\|_{1,\infty,\tilde{K}} \stackrel{(4.43)}{\geq} c_2 c_0 n > 0. \end{aligned}$$

Analog folgen auch die Abschätzungen in der L^2 - und in der $W^{1,2}$ -Norm ($k \in \{0, 1\}$):

$$\begin{aligned} \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{k,2,\Omega} &\geq \inf_{\hat{v} \in V_{K_n}} \|\tilde{g}_n - \hat{v}\|_{k,2,K_n} \stackrel{(3.40)}{=} \inf_{\tilde{v} \in V_{\tilde{K}}} \|\tilde{g}_n - \tilde{v} \circ F_{K_n}\|_{k,2,K_n} \\ &\stackrel{(3.35)}{\geq} c_1 \|A_{K_n}^{-1}\|^{-k} |\det A_{K_n}|^{-\frac{1}{2}} \inf_{\tilde{v} \in V_{\tilde{K}}} \|\tilde{g} - \tilde{v}\|_{k,2,\tilde{K}} \\ &\stackrel{(3.43),(3.44)}{\geq} c_1 \left[\frac{\rho(\tilde{K})}{\text{diam } K_n} \right]^k \left[\frac{\text{meas } \tilde{K}}{\text{meas } K_n} \right]^{-\frac{1}{2}} \inf_{\tilde{v} \in V_{\tilde{K}}} \|\tilde{g} - \tilde{v}\|_{k,2,\tilde{K}} \\ &\stackrel{(3.15),(3.16)}{\geq} c_2 n^k \left[\frac{1}{n^m} \right]^{\frac{1}{2}} \inf_{\tilde{v} \in V_{\tilde{K}}} \|\tilde{g} - \tilde{v}\|_{k,2,\tilde{K}} \stackrel{(4.43)}{\geq} c_2 c_0 n^{k-\frac{m}{2}} > 0, \end{aligned}$$

womit das Lemma bewiesen ist. \blacksquare

Für die Folge $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gelten insbesondere die folgenden Beschränktheits- und Jackson-Bernstein-Typ-Abschätzungen ($j, n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $\delta > 0$)

$$\|n^{-s} \tilde{g}_n\|_{s, \bar{\Omega}} \stackrel{(4.38)}{\leq} C, \quad (4.44)$$

$$\|n^{-s+\frac{m}{2}} \tilde{g}_n\|_{s, 2, \Omega} \stackrel{(4.39)}{\leq} C \quad (4.45)$$

sowie (siehe Lemma 2.16a) und e):

$$\omega_j^{(s)}(\delta, n^{-s} \tilde{g}_n, C(\bar{\Omega})) \leq \begin{cases} C_1 n^{-s} |\tilde{g}_n|_{s, \bar{\Omega}} \stackrel{(4.38)}{\leq} C_2 \\ C_1 \delta^j n^{-s} |\tilde{g}_n|_{s+j, \bar{\Omega}} \stackrel{(4.38)}{\leq} C_2 \delta^j n^j, \end{cases} \quad (4.46)$$

$$\omega_j^{(s)}(\delta, n^{-s+\frac{m}{2}} \tilde{g}_n, L^2(\Omega)) \leq \begin{cases} C_1 n^{-s+\frac{m}{2}} |\tilde{g}_n|_{s, 2, \Omega} \stackrel{(4.39)}{\leq} C_2 \\ C_1 \delta^j n^{-s+\frac{m}{2}} |\tilde{g}_n|_{s+j, 2, \Omega} \stackrel{(4.39)}{\leq} C_2 \delta^j n^j. \end{cases} \quad (4.47)$$

Dabei sind alle Konstanten von n und δ unabhängig.

Beweis zu Satz 4.14

zu a) Wir setzen die Parameter in Satz 2.30 wie folgt ($h = 1/n$):

$$X = W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega), \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{2,2,\Omega}, \quad \varphi_n = \frac{1}{n^{r-1}} = h^{r-1}, \quad \sigma(\delta) = \delta^{r-1},$$

$$S_\delta u = \omega_{r-1}^{(2)}(\delta, u, L^2(\Omega)), \quad T_n u = n^2 \inf_{v \in V_{1/n}} \|u - v\|_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{h^2} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{L^2(\Omega)},$$

$$g_n(x) = n^{-2+\frac{m}{2}} \tilde{g}_n(x),$$

wobei $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge aus Lemma 4.17 ist. Da $\tilde{g}_n \in C_0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\bar{\Omega})$ (beachte $\text{Tr } \tilde{g}_n \subset \bar{\Omega}$), ist insbesondere $\tilde{g}_n \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ (vgl. (2.5)). Wir müssen die Bedingungen (2.27)–(2.29) überprüfen. (2.27) folgt direkt aus (4.45) für $s = 2$. (2.28) ergibt sich ebenso aus (4.47) für $s = 2$ und $j = r - 1$. Schließlich folgt (2.29) aus (4.42) für $k = 0$:

$$T_n g_n = n^2 \inf_{v \in V_{1/n}} \|g_n - v\|_{L^2(\Omega)} = n^{\frac{m}{2}} \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{L^2(\Omega)} \stackrel{(4.42)}{\geq} c > 0.$$

Also ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} T_n g_n \geq c > 0$, und nach Satz 2.30 existiert ein Gegenbeispiel $u_\omega \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$, das die Bedingung (4.28) erfüllt und ($h = 1/n$)

$$\|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{L^2(\Omega)} \geq \inf_{v \in V_{1/n}} \|u_\omega - v\|_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{n^2} T_n u_\omega \stackrel{(2.31)}{\neq} o\left(\frac{1}{n^2} \omega\left(\frac{1}{n^{r-1}}\right)\right).$$

zu b) Hätten wir die Voraussetzungen von Satz 3.17a), also insbesondere die Konvexität von Ω , zur Verfügung, so wären wir für $s = 2$ mit dem Gegenbeispiel u_ω von a) bereits fertig, denn:

$$\|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{1,2,\Omega} \stackrel{(3.51)}{\geq} \frac{c}{h} \|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{L^2(\Omega)} \neq o(h\omega(h^{r-1})).$$

Wir benutzen aber wieder Satz 2.30 ($h = 1/n$):

$$X = W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{s,2}(\Omega), \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{s,2,\Omega}, \quad \varphi_n = \frac{1}{n^{r+1-s}} = h^{r+1-s}, \quad \sigma(\delta) = \delta^{r+1-s},$$

$$S_\delta u = \omega_{r+1-s}^{(s)}(\delta, u, L^2(\Omega)), \quad T_n u = n^{s-1} \inf_{v \in V_{1/n}} \|u - v\|_{1,2,\Omega}, \quad g_n(x) = n^{-s+\frac{m}{2}} \tilde{g}_n(x).$$

Wieder folgt (2.27) aus (4.45), (2.28) aus (4.47) für $j = r + 1 - s$ und (2.29) aus (4.42) für $k = 1$:

$$T_n g_n = n^{s-1} \inf_{v \in V_{1/n}} \|g_n - v\|_{1,2,\Omega} = n^{-1+\frac{m}{2}} \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{1,2,\Omega} \stackrel{(4.42)}{\geq} c > 0.$$

Also existiert mit Satz 2.30 ein u_ω , so daß (4.30) gilt und

$$\|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{1,2,\Omega} \geq \frac{1}{n^{s-1}} T_n u_\omega \stackrel{(2.31)}{\neq} o\left(\frac{1}{n^{s-1}} \omega\left(\frac{1}{n^{r+1-s}}\right)\right).$$

■

Völlig analog verläuft auch der

Beweis zu Satz 4.15

zu a) Wir legen wieder die Parameter in Satz 2.30 fest ($h = 1/n$):

$$X = C_0(\bar{\Omega}) \cap C^s(\bar{\Omega}), \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{s,\bar{\Omega}}, \quad \varphi_n = \frac{1}{n^{r+1-s}} = h^{r+1-s}, \quad \sigma(\delta) = \delta^{r+1-s},$$

$$S_\delta u = \omega_{r+1-s}^{(s)}(\delta, u, C(\bar{\Omega})), \quad T_n u = n^s \inf_{v \in V_{1/n}} \|u - v\|_{C(\bar{\Omega})}, \quad g_n(x) = n^{-s} \tilde{g}_n(x).$$

Denn (2.27) folgt aus (4.44), (2.28) aus (4.46) für $j = r + 1 - s$ und (2.29) aus (4.40). Satz 2.30 liefert wieder ein Gegenbeispiel u_ω mit (4.32) und

$$\|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{C(\bar{\Omega})} \geq \frac{1}{n^s} T_n u_\omega \stackrel{(2.31)}{\neq} o\left(\frac{1}{n^s} \omega\left(\frac{1}{n^{r+1-s}}\right)\right).$$

zu b) Hier ändern wir nur die Definition von T_n :

$$X = C_0(\bar{\Omega}) \cap C^s(\bar{\Omega}), \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{s,\bar{\Omega}}, \quad \varphi_n = \frac{1}{n^{r+1-s}} = h^{r+1-s}, \quad \sigma(\delta) = \delta^{r+1-s},$$

$$S_\delta u = \omega_{r+1-s}^{(s)}(\delta, u, C(\bar{\Omega})), \quad T_n u = n^{s-1} \inf_{v \in V_{1/n}} \|u - v\|_{1,\infty,\Omega}, \quad g_n(x) = n^{-s} \tilde{g}_n(x).$$

Wieder ergeben sich (2.27) und (2.28) aus (4.44) und (4.46). (2.29) folgt aus (4.41), und Satz 2.30 sorgt für ein u_ω mit (4.34) und

$$\|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{1,\infty,\Omega} \geq \frac{1}{n^{s-1}} T_n u_\omega \stackrel{(2.31)}{\neq} o\left(\frac{1}{n^{s-1}} \omega\left(\frac{1}{n^{r+1-s}}\right)\right).$$

■

Bei der Benutzung von Resonanzprinzipien ist die Konstruktion der Resonanzfolgen g_n die eigentliche Aufgabe. Hier wurde sie in Lemma 4.17 mittels der affinen Transformation einer glatten Funktion auf eine Folge von Elementen der Triangulierungen

gelöst. Dieses Vorgehen entspricht damit auch dem Beweis der direkten Sätze, bei denen Fehlerabschätzungen auf einem Referenzelement mit dem Bramble-Hilbert-Lemma erstellt und dann mittels affiner Transformation auf ganz Ω ausgedehnt wurden. In [67, Kapitel 4.4] wird die Schärfe einer Fehlerabschätzung für $\|u - P_h u\|_{L^2(\Omega)}$ bei linearen Ansatzfunktionen ebenfalls mit einem Resonanzprinzip bewiesen. Die Konstruktion der Resonanzfolge basiert dort allerdings auf den Hilbert-Raum-Eigenschaften von $L^2(\Omega)$. Es wird nicht benutzt, daß die Elemente der Triangulierungen affin äquivalent sind. Es gibt wichtige Finite-Elemente, deren Freiheitsgrade für affine Transformationen ungeeignet sind. So lassen sich z.B. bei Bell-Dreiecken, das sind spezielle Hermite-Elemente, die Räume V_K i.a. nicht wie in (3.40) ineinander überführen (siehe [21, S.99]). Damit scheitert ein Beweis wie zu Lemma 4.17. Dagegen läßt sich auch noch in diesen Fällen eine verallgemeinerte Variante der in [67] beschriebenen Methode benutzen. Wir betrachten hier zwar keine Hermite-Elemente, greifen aber den Ansatz aus [67], der dort sehr konkret auf lineare Elemente zugeschnitten ist, auf und übertragen ihn in unsere allgemeinere Situation. Dabei erhalten wir einen alternativen Beweis zu Lemma 4.17 und damit in der Folge einen weiteren Beweis der Sätze 4.14 und 4.15. Ausgangspunkt ist die Charakterisierung der besten Approximation im Hilbert-Raum durch die Partialsummen:

Lemma 4.18 *Sei H ein (reeller) Prä-Hilbert-Raum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_H$ und Norm $\|f\|_H = \sqrt{(f, f)_H}$. Weiter sei $U \subset H$ ein n -dimensionaler Teilraum mit der Orthonormalbasis $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Dann ist*

$$\inf_{g \in U} \|f - g\|_H^2 = \left\| f - \sum_{j=1}^n (f, \varphi_j)_H \varphi_j \right\|_H^2 = \|f\|_H^2 - \sum_{j=1}^n (f, \varphi_j)_H^2 \quad \forall f \in H. \quad (4.48)$$

Damit werden wir die folgende Verallgemeinerung von Lemma 4.17 beweisen:

Lemma 4.19 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ polygonal und $\{\mathcal{T}_h : 0 < h \leq 1\}$ eine Familie von Triangulierungen, so daß zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $K_n \in \mathcal{T}_{1/n}$ existiert mit $\text{diam } K_n \leq C/n$ und $\rho(K_n) \geq c/n$, $0 < c, C < \infty$ (unabhängig von n , vgl. (3.13), (3.15)). Weiter sei $\{V_h \subset C_0(\overline{\Omega}) \cap W^{1,\infty}(\Omega) : 0 < h \leq 1\}$ eine Familie von beliebigen linearen Ansatzfunktionenräumen (die nicht durch m -Simplexe, m -Rechtecke oder Serendipity-Elemente erzeugt sein müssen), so daß ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit*

$$1 < \dim V_{K_n} \leq N \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (4.49)$$

wobei wir hier $V_{K_n} := V_{1/n}|_{K_n}$ setzen (vgl. (3.19)). Dann gilt:

- a) *Es existieren eine Folge $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $\text{Tr } \tilde{g}_n \subset K_n$ und Konstanten $0 < c, C < \infty$ mit (vgl. (4.38)–(4.42), $j \in \mathbb{N}_0$)*

$$|\tilde{g}_n|_{j, \overline{\Omega}} \leq Cn^j, \quad |\tilde{g}_n|_{j, 2, \Omega} \leq Cn^{j - \frac{m}{2}},$$

$$\inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{C(\overline{\Omega})} \geq c, \quad \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{L^2(\Omega)} \geq cn^{-\frac{m}{2}}.$$

b) Es existieren eine Folge $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $\text{Tr } \tilde{g}_n \subset K_n$ und Konstanten $0 < c, C < \infty$ mit (vgl. (4.38)–(4.42), $j \in \mathbb{N}_0$)

$$|\tilde{g}_n|_{j, \bar{\Omega}} \leq Cn^j, \quad |\tilde{g}_n|_{j, 2, \Omega} \leq Cn^{j - \frac{m}{2}},$$

$$\inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{1, \infty, \Omega} \geq cn, \quad \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{1, 2, \Omega} \geq cn^{1 - \frac{m}{2}}.$$

Wir verlangen nicht, daß die Folgen in a) und b) gleich sind.

Beweis zu a) Sei $N_n := \dim V_{K_n}$. Nach dem Orthonormierungsverfahren von Gram-Schmidt existiert eine Orthonormalbasis $\{\varphi_{1,n}, \dots, \varphi_{N_n,n}\}$ von $(V_{K_n}, \|\cdot\|_{L^2(K_n)})$. Da $\rho(K_n) \geq c/n$, liegt im m -Simplex oder m -Rechteck K_n eine Kugel mit Durchmesser c/n . In dieser liegt ein m -dimensionaler Würfel Q mit Kantenlänge $c/(n\sqrt{m})$ (beachte: $\text{diam } Q = \sqrt{[c/(n\sqrt{m})]^2 + \dots + [c/(n\sqrt{m})]^2} = \sqrt{m}[c/(n\sqrt{m})]^2 = c/n \leq \rho(K_n)$). Jetzt wird jede Kante von Q in N_n^2 gleich große Strecken aufgeteilt, so daß N_n^{2m} Teilwürfel Q_k mit Kantenlänge $c/(N_n^2 n \sqrt{m})$ entstehen. Nun ist

$$\begin{aligned} 1 &= \|\varphi_{1,n}\|_{L^2(K_n)}^2 \geq \|\varphi_{1,n}\|_{L^2(Q)}^2 = \sum_{k=1}^{N_n^{2m}} \|\varphi_{1,n}\|_{L^2(Q_k)}^2 \\ &\geq N_n^{2m} \min\{\|\varphi_{1,n}\|_{L^2(Q_k)}^2 : 1 \leq k \leq N_n^{2m}\} = N_n^{2m} \|\varphi_{1,n}\|_{L^2(Q_j)}^2 \end{aligned}$$

für ein $1 \leq j \leq N_n^{2m}$. Wir unterteilen jetzt Q_j analog zu Q und erhalten ein Quadrat $Q_{j,i} \subset Q_j$ der Kantenlänge $c/(N_n^4 n \sqrt{m})$, so daß

$$1 = \|\varphi_{2,n}\|_{L^2(K_n)}^2 \geq \|\varphi_{2,n}\|_{L^2(Q_j)}^2 \geq N_n^{2m} \|\varphi_{2,n}\|_{L^2(Q_{j,i})}^2.$$

Diese Konstruktion (siehe Abbildung 4.3) wird nun sukzessive fortgesetzt, bis man schließlich einen Würfel \tilde{Q}_n der Kantenlänge $l_n = c/(N_n^{2N_n} n \sqrt{m})$ erhält mit

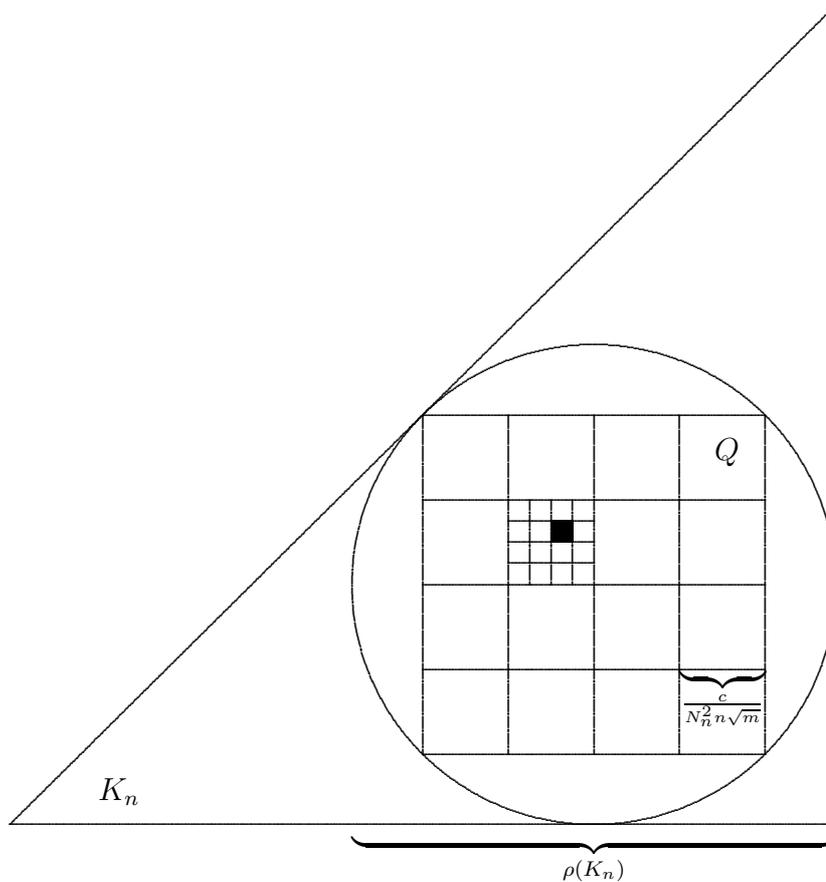
$$\|\varphi_{j,n}\|_{L^2(\tilde{Q}_n)} \leq N_n^{-m} \quad \forall 1 \leq j \leq N_n. \quad (4.50)$$

Da $N_n \leq N$, ist also

$$c_1 n^{-1} \leq l_n \leq C_1 n^{-1} \quad (4.51)$$

für von n unabhängige Konstanten $0 < c_1, C_1 < \infty$. Sei nun \tilde{g}_n die Funktion aus Lemma 4.16 mit $\text{Tr } \tilde{g}_n \subset \tilde{Q}_n = \prod_{j=1}^m [a_j, b_j]$ mit $b_j - a_j = l_n$. Dann ist ($j \in \mathbb{N}_0$)

$$\begin{aligned} |\tilde{g}_n|_{j, \bar{\Omega}} &= |\tilde{g}_n|_{j, \tilde{Q}_n} \stackrel{(4.36)}{=} \sum_{|\alpha|=j} C_\alpha \left(\frac{2}{l_n}\right)^j = C_0 l_n^{-j} \\ |\tilde{g}_n|_{j, 2, \Omega} &= |\tilde{g}_n|_{j, 2, \tilde{Q}_n} \stackrel{(4.37)}{=} \sum_{|\alpha|=j} C_\alpha \left(\frac{2}{l_n}\right)^j \sqrt{\left(\frac{l_n}{2}\right)^m} = C_0 l_n^{\frac{m}{2} - j}, \end{aligned} \quad (4.52)$$

Abbildung 4.3: Konstruktion von \tilde{Q}_n zu $m = 2$ und $N_n = 2$

so daß

$$|\tilde{g}_n|_{j,\bar{\Omega}} \stackrel{(4.51)}{\leq} Cn^j, \quad |\tilde{g}_n|_{j,2,\Omega} \stackrel{(4.51)}{\leq} Cn^{j-\frac{m}{2}} \quad (4.53)$$

$$\|\tilde{g}_n\|_{L^2(\tilde{Q}_n)} \stackrel{(4.51)}{\geq} cn^{-\frac{m}{2}} > 0. \quad (4.54)$$

Dabei sind die Konstanten unabhängig von \tilde{Q}_n und damit von n . Für die Abschätzung der Fehler der besten Approximation erhalten wir mit (4.48):

$$\begin{aligned} \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{L^2(\Omega)}^2 &\geq \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{L^2(K_n)}^2 = \inf_{v \in V_{K_n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{L^2(K_n)}^2 \\ &\stackrel{(4.48)}{=} \|\tilde{g}_n\|_{L^2(K_n)}^2 - \sum_{j=1}^{N_n} (\tilde{g}_n, \varphi_{j,n})_{L^2(K_n)}^2 \\ &= \|\tilde{g}_n\|_{L^2(\tilde{Q}_n)}^2 - \sum_{j=1}^{N_n} (\tilde{g}_n, \varphi_{j,n})_{L^2(\tilde{Q}_n)}^2 \\ &\geq \|\tilde{g}_n\|_{L^2(\tilde{Q}_n)}^2 - \sum_{j=1}^{N_n} \|\tilde{g}_n\|_{L^2(\tilde{Q}_n)}^2 \|\varphi_{j,n}\|_{L^2(\tilde{Q}_n)}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{(4.50)}{\geq} \|\tilde{g}_n\|_{L^2(\tilde{Q}_n)}^2 \left(1 - \sum_{j=1}^{N_n} N_n^{-2m}\right) = \|\tilde{g}_n\|_{L^2(\tilde{Q}_n)}^2 (1 - N_n^{1-2m}) \\
&\stackrel{N_n \geq 2}{\geq} (1 - 2^{1-2m}) \|\tilde{g}_n\|_{L^2(\tilde{Q}_n)}^2 \stackrel{(4.54)}{\geq} \frac{1}{2} \|\tilde{g}_n\|_{L^2(\tilde{Q}_n)}^2 \geq cn^{-m}. \quad (4.55)
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\text{diam } K_n \leq c/n$, folgt sofort auch

$$\begin{aligned}
\inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{C(\bar{\Omega})} &\geq \text{meas}(K_n)^{-\frac{1}{2}} \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{L^2(K_n)} \\
&\geq [c_1(\text{diam } K_n)^m]^{-\frac{1}{2}} \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{L^2(K_n)} \\
&\stackrel{(4.55)}{\geq} c_2 n^{\frac{m}{2}} \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{L^2(K_n)} \geq c_3.
\end{aligned}$$

zu b) Wir verfahren analog zu a), gehen aber jetzt von einer bezüglich $W^{1,2}(K_n)$ orthonormierten Basis $\{\varphi_{1,n}, \dots, \varphi_{N_n,n}\}$ von V_{K_n} aus. Dann existieren wieder Würfel \tilde{Q}_n mit (4.51), also Kantenlänge $c_1 n^{-1} \leq l_n \leq C_1 n^{-1}$, so daß

$$\|\varphi_{j,n}\|_{1,2,\tilde{Q}_n} \leq N_n^{-m} \quad \forall 1 \leq j \leq N_n. \quad (4.56)$$

Sei wie zu a) die Funktion \tilde{g}_n aus Lemma 4.16 mit $\text{Tr } \tilde{g}_n \subset \tilde{Q}_n = \prod_{j=1}^m [a_j, b_j]$ und (4.53), so ist

$$\|\tilde{g}_n\|_{1,2,\Omega} \geq |\tilde{g}_n|_{1,2,\Omega} \stackrel{(4.52),(4.51)}{\geq} cn^{1-\frac{m}{2}}. \quad (4.57)$$

Analog zu a) wird auch der Fehler abgeschätzt:

$$\begin{aligned}
\inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{1,2,\Omega}^2 &\geq \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{1,2,K_n}^2 \stackrel{(4.48)}{=} \|\tilde{g}_n\|_{1,2,K_n}^2 - \sum_{j=1}^{N_n} (\tilde{g}_n, \varphi_{j,n})_{1,2,K_n}^2 \\
&\geq \|\tilde{g}_n\|_{1,2,\tilde{Q}_n}^2 - \sum_{j=1}^{N_n} \|\tilde{g}_n\|_{1,2,\tilde{Q}_n}^2 \|\varphi_{j,n}\|_{1,2,\tilde{Q}_n}^2 \\
&\stackrel{(4.56)}{\geq} (1 - N_n^{1-2m}) \|\tilde{g}_n\|_{1,2,\tilde{Q}_n}^2 \stackrel{N_n \geq 2}{\geq} (1 - 2^{1-2m}) \|\tilde{g}_n\|_{1,2,\tilde{Q}_n}^2 \stackrel{(4.57)}{\geq} cn^{2(1-\frac{m}{2})}. \quad (4.58)
\end{aligned}$$

Schließlich folgt auch noch:

$$\begin{aligned}
\inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{1,\infty,\Omega} &= \inf_{v \in V_{1/n}} \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \|\tilde{g}_n - v\|_{\alpha,\infty,\Omega} \right) \\
&\geq \text{meas}(K_n)^{-\frac{1}{2}} \inf_{v \in V_{1/n}} \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \|\tilde{g}_n - v\|_{\alpha,2,K_n} \right) \\
&\stackrel{\text{vgl. (2.3)}}{\geq} \text{meas}(K_n)^{-\frac{1}{2}} \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{1,2,K_n} \\
&\stackrel{(4.58)}{\geq} c_1 n^{\frac{m}{2}} \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{1,2,K_n} \geq c_2 n.
\end{aligned}$$

■

4.2.2 Schärfe der Jackson-Ungleichung (3.82)

Wir diskutieren hier nochmals die Schärfe der Fehlerschranke (3.82) für solche Lösungen u von Aufgaben (3.5), die insbesondere in $W^{\nu,2}(\Omega)$, $2 \leq \nu \leq r+1$, liegen:

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leq Ch^{\nu-1} \|u\|_{\nu,2,\Omega}.$$

In Kapitel 3.4 haben wir bereits gesehen, daß man diese Schranke in Abhängigkeit der konkreten Lösung u für $\nu \neq r+1$ verbessern kann. Unter Verwendung der Resonanzelemente aus Lemma 4.17 läßt sich dagegen zeigen, daß (vgl. (1.13) und Beweis zu Satz 4.20, $\nu \in [2, r+1)$)

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \left[\sup_{0 \neq u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{\nu,2}(\Omega)} \frac{\|u - u_h\|_{1,2,\Omega}}{h^{\nu-1} \|u\|_{\nu,2,\Omega}} \right] \geq c > 0,$$

d.h., die Abschätzung kann nicht gleichmäßig für alle Lösungen u aus dem Raum $W^{\nu,2}(\Omega)$ (vgl. Lemma 4.13) verbessert werden; es existiert keine von u unabhängige Funktion φ mit $\lim_{h \rightarrow 0+} \varphi(h) = 0$ und keine von u unabhängige Konstante C , so daß

$$\|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \leq C\varphi(h)h^{\nu-1} \|u\|_{\nu,2,\Omega}. \quad (4.59)$$

Unter Verwendung des Resonanzprinzips Satz 2.29 läßt sich darüber hinaus zu jedem φ aus der Folge der Resonanzelemente ein Gegenbeispiel u_φ kondensieren, so daß eine Fehlerschranke (4.59) selbst mit einer von u abhängigen Konstanten C nicht gelten kann.

Satz 4.20 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein polygonales Gebiet und $V_h = V_h(r)$ durch eine gleichmäßig reguläre Familie von Triangulierungen erzeugte Ansatzfunktionenräume. Für die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ aus (3.4) gelte neben $a_{\alpha,\beta} \in L^\infty(\Omega)$ zusätzlich, daß $a_{\alpha,\beta} \in C^1(\overline{\Omega})$ für $|\beta| = 1$. Weiter sei $\nu \in [2, r+1)$. Dann existiert zu jeder positiven Funktion $\varphi : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{h \rightarrow 0+} \varphi(h) = 0$ ein Gegenbeispiel $u_\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{\nu,2}(\Omega)$ (das wegen $\nu \geq 2$ und Lemma 4.13 Lösung einer Aufgabe (3.5) ist), so daß*

$$\|u_\varphi - (u_\varphi)_h\|_{1,2,\Omega} \neq \mathcal{O}(\varphi(h)h^{\nu-1}).$$

Beweis Wir legen die Daten für den Satz 2.29 fest ($h = 1/n$):

$$X = W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{\nu,2}(\Omega), \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{\nu,2,\Omega}, \quad g_n(x) = \frac{n^{\frac{m}{2}}}{n^\nu} \tilde{g}_n(x),$$

$$T_n u = \frac{\inf\{\|u - v\|_{1,2,\Omega} : v \in V_{1/n}\}}{\varphi(n^{-1})n^{-(\nu-1)}} \in (W_0^{1,2}(\Omega))^\sim \subset X^\sim,$$

wobei $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge aus Lemma 4.17 ist. Nach (4.39) bzw. (4.45) ist $\|n^\nu g_n\|_{1,2,\Omega} \leq Cn$ und $\|n^\nu g_n\|_{r+1,2,\Omega} \leq Cn^{r+1}$. Nach (2.22) für $\nu = (1 - \Theta) + \Theta(r+1)$, also $\Theta = \frac{\nu-1}{r}$, folgt mit Lemma 2.25

$$\|n^\nu g_n\|_{\nu,2,\Omega} \leq C_1 \|n^\nu g_n\|_{1,2,\Omega}^{1-\Theta} \|n^\nu g_n\|_{r+1,2,\Omega}^\Theta \leq C_2 n^{1-\Theta} n^{(r+1)\Theta} = C_2 n^\nu,$$

also $\|g_n\|_{\nu,2,\Omega} \leq C_2$, so daß (2.25) gezeigt ist. Zur Resonanzbedingung (2.26):

$$\begin{aligned} T_n g_n &= \frac{n^{\frac{m}{2}}}{n^\nu \varphi(n^{-1}) n^{-(\nu-1)}} \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{1,2,\Omega} \\ &= \frac{n^{\frac{m}{2}-1}}{\varphi(n^{-1})} \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{1,2,\Omega} \\ &\stackrel{(4.42)}{\geq} \frac{n^{\frac{m}{2}-1}}{\varphi(n^{-1})} n^{1-\frac{m}{2}} = \frac{c}{\varphi(n^{-1})} \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Damit existiert nach Satz 2.29 ein Gegenbeispiel $u_\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{\nu,2}(\Omega)$ mit ($h = 1/n$)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|u_\varphi - (u_\varphi)_h\|_{1,2,\Omega}}{\varphi(n^{-1}) n^{-(\nu-1)}} \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} T_n u_\varphi = \infty.$$

■

4.2.3 Der Fall $\omega(\delta) = \delta$

Der Randfall $\omega(\delta) = \delta$ ist in den Sätzen 4.14 und 4.15 ausgeschlossen, da das im Beweis benutzte Resonanzprinzip Satz 2.30 dafür nicht anwendbar ist³. Benutzen wir statt dessen die Variante Satz 2.32, so erhalten wir auch die Aussagen im Fall $\omega(\delta) = \delta$, allerdings um den Preis einer beliebigen Nullfolge. So existiert z.B. unter den Voraussetzungen von Satz 4.14 zu jeder Nullfolge $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Gegenbeispiel $u_\varepsilon \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ mit ($h = 1/n$, $\delta \rightarrow 0+$, $h \rightarrow 0+$)

$$\omega_{r-1}^{(2)}(\delta, u_\varepsilon, L^2(\Omega)) = \mathcal{O}(\delta^{r-1}) \quad (4.60)$$

$$\|u_\varepsilon - (u_\varepsilon)_h\|_{L^2(\Omega)} \neq o(\varepsilon_n h^{r+1}). \quad (4.61)$$

Da ε_n beliebig gewählt werden kann, ist die Ordnung der Fehlerschranke (3.52) in diesem Sinne nicht verbesserbar. Das muß aber nicht bedeuten, daß die Schranke selbst optimal ist. Benutzen wir statt $V_h(r)$ die Ansatzfunktionen höheren Grades $V_h(r+1)$, so existieren weiterhin Gegenbeispiele u_ε mit (4.60) und (4.61). Im Beweis zu Satz 4.14 spielt der tatsächliche Polynomgrad der Ansatzfunktionen keine Rolle. Der Satz bleibt damit auch gültig, wenn wir $V_h(r)$ durch $V_h(r+1)$ ersetzen, sonst aber den Parameter r nicht durch $r+1$ austauschen. Aber offensichtlich (vgl. Lemma 2.16d)) ist die dann gültige Fehlerschranke

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \omega_r^{(2)}(h, u, L^2(\Omega)) \quad (4.62)$$

besser als

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2 \omega_{r-1}^{(2)}(h, u, L^2(\Omega)).$$

³Es gibt Resonanzprinzipien, die diesen Fall nicht ausschließen, siehe [26, 69]. Allerdings benötigen sie entsprechend stärkere Voraussetzungen, die wir hier nicht nachweisen können.

Wir erhalten also die Schärfe der zweiten Abschätzung im Sinne von Gegenbeispielen, obwohl sie verbessert werden kann. Dieser Effekt kann durch die Angabe eines glatten Gegenbeispiels im Fall $\omega(\delta) = \delta$ ausgeschlossen werden: Ist $u_0 \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{r+2,2}(\Omega)$ mit $(h \rightarrow 0+)$

$$\|u_0 - (u_0)_h\|_{L^2(\Omega)} \neq o(h^{r+1}), \quad (4.63)$$

so ist keine Abschätzung gegen einen Modul höherer Ordnung als $\omega_{r-1}^{(2)}(h, u, L^2(\Omega))$ möglich: Hätten wir die Abschätzung (4.62), so wäre

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{2+r}|u|_{r+2,2,\Omega} = o(h^{r+1}) \quad \forall u \in W^{r+2,2}(\Omega),$$

im Widerspruch zu (4.63). Wir konstruieren jetzt explizit ein erforderliches elementares Gegenbeispiel (vgl. z.B. [9, S.142]). Konkret betrachten wir zu $\Omega = (0, 1)^2$ die Familie der gleichmäßig regulären Triangulierungen (3.17) und die zugehörigen, über 2-Simplexe vom Grad r erzeugten Ansatzfunktionenräume $V_h = V_h(r)$. Insbesondere ist für $h = 1/n$ nach (3.12) $\mathcal{T}_h = \{K_{j,l}^i : 1 \leq j, l \leq n, i = 0, 1\}$. Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ mit $\text{Tr } \varphi \subset [0, 1]^2$ und $\varphi \equiv 1$ auf $[1/4, 3/4]^2$ (bzgl. der Existenz von φ siehe z.B. [58, S.35]; entsprechende Funktionen werden auch im Anhang A maßgeblich verwendet; vgl. auch (5.18)). Das Gegenbeispiel sei konkret

$$u_0(x) := \varphi(x)x_1^{r+1} \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \quad (x = (x_1, x_2)).$$

Nach Wahl von φ ist $u_0|_{\partial\Omega} \equiv 0$, und nach Lemma 4.13 ist u_0 Lösung einer geeigneten Aufgabe (3.5). Sei $h = 1/n$ und $(u_0)_h$ die zugehörige Finite-Element-Approximation gemäß (3.49). Dann gilt für den Fehler:

$$\begin{aligned} \|u_0 - (u_0)_h\|_{L^2(0,1)^2}^2 &\geq \inf_{v \in V_h(r)} \|u_0 - v\|_{L^2(0,1)^2}^2 = \inf_{v \in V_h(r)} \sum_{i=0}^1 \sum_{j,l=1}^n \|u_0 - v\|_{L^2(K_{j,l}^i)}^2 \\ &\geq \sum_{i=0}^1 \sum_{j,l=1}^n \inf_{v \in \mathcal{P}_r(K_{j,l}^i)} \|u_0 - v\|_{L^2(K_{j,l}^i)}^2 \geq \sum_{\substack{j,l=1 \\ K_{j,l}^0 \subset [1/4, 3/4]^2}}^n \inf_{v \in \mathcal{P}_r(K_{j,l}^0)} \|u_0 - v\|_{L^2(K_{j,l}^0)}^2. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Für $K_{j,l}^0 \subset [1/4, 3/4]^2$ ist $u_0(x)|_{K_{j,l}^0} = x_1^{r+1}$ und (vgl. Abbildung 4.4)

$$\begin{aligned} &\inf_{v \in \mathcal{P}_r(K_{j,l}^0)} \|u_0 - v\|_{L^2(K_{j,l}^0)}^2 \\ &= \inf \left\{ \int_{(l-1)h}^{lh} \int_{(j-1)h+x_2-(l-1)h}^{jh} \left| x_1^{r+1} - \sum_{|\alpha| \leq r} c_\alpha x^\alpha \right|^2 dx_1 dx_2 : c_\alpha \in \mathbb{R} \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \int_{(l-1)h}^{(l-1/2)h} \int_{(j-1/2)h}^{jh} \left| x_1^{r+1} - \sum_{|\alpha| \leq r} c_\alpha x^\alpha \right|^2 dx_1 dx_2 : c_\alpha \in \mathbb{R} \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \frac{1}{2}h \inf_{x_2 \in [(l-1)h, (l-1/2)h]} \int_{(j-1/2)h}^{jh} \left| x_1^{r+1} - \sum_{|\alpha| \leq r} c_\alpha x^\alpha \right|^2 dx_1 : c_\alpha \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

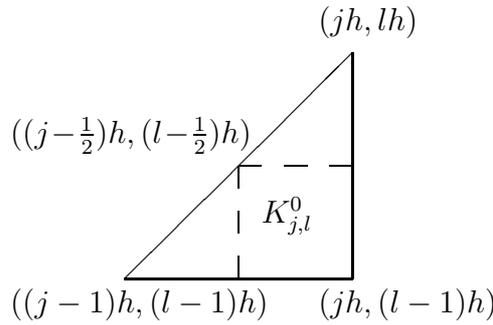


Abbildung 4.4: Zur Zerlegung des Integrationsbereichs

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}h \inf \left\{ \int_{(j-1/2)h}^{jh} \left| x_1^{r+1} - \sum_{|\alpha| \leq r} c_\alpha x^\alpha \right|^2 dx_1 : c_\alpha \in \mathbb{R}, x_2 \in [(l-1)h, (l-1/2)h] \right\} \\
&= \frac{1}{2}h \inf \left\{ \int_{(j-1/2)h}^{jh} \left| x_1^{r+1} - \sum_{i=0}^r c_i x_1^i \right|^2 dx_1 : c_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq r \right\}, \quad (4.65)
\end{aligned}$$

wobei sich die Konstanten c_i aus den c_α und den Potenzen von x_2 ergeben. Mit der Substitution $y = 2 \frac{x_1 - (j-1/2)h}{jh - (j-1/2)h} - 1$, also $x_1 = \frac{h}{4}y + C_h$ mit $C_h = (j-1/4)h$, ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\int_{(j-1/2)h}^{jh} \left| x_1^{r+1} - \sum_{i=0}^r c_i x_1^i \right|^2 dx_1 \\
&= \frac{h}{4} \int_{-1}^1 \left| \left(\frac{h}{4}y + C_h \right)^{r+1} - \sum_{i=0}^r c_i \left(\frac{h}{4}y + C_h \right)^i \right|^2 dy \\
&= \left(\frac{h}{4} \right)^{2r+3} \int_{-1}^1 \left| \left(y + \frac{4}{h}C_h \right)^{r+1} - \sum_{i=0}^r c_i \left(\frac{4}{h} \right)^{r+1} \left(\frac{h}{4}y + C_h \right)^i \right|^2 dy \\
&= \left(\frac{h}{4} \right)^{2r+3} \int_{-1}^1 |y^{r+1} - v(y; h)|^2 dy,
\end{aligned}$$

wobei $v(\cdot; h) \in \mathcal{P}_r$. Dies eingesetzt in (4.65) ergibt:

$$\inf_{v \in \mathcal{P}_r(K_{j,l}^0)} \|u_0 - v\|_{L^2(K_{j,l}^0)}^2 \geq \frac{h}{2} \left(\frac{h}{4} \right)^{2r+3} \inf_{v \in \mathcal{P}_r} \int_{-1}^1 |y^{r+1} - v(y)|^2 dy \geq c_{1,r} h^{2r+4}.$$

Zusammen mit (4.64) folgt damit schließlich insgesamt:

$$\|u_0 - (u_0)_h\|_{L^2(0,1)^2} \geq \sqrt{\sum_{\substack{j,l=1 \\ K_{j,l}^0 \subset [1/4, 3/4]^2}}^n c_{1,r} h^{2r+4}} \stackrel{\text{vgl. (3.12)}}{\geq} \sqrt{c_{2,r} h^{-2} h^{2r+4}} = \sqrt{c_{2,r}} h^{r+1}.$$

Andererseits gilt mit Satz 3.17a), daß $\|u_0 - (u_0)_h\|_{L^2(0,1)^2} = \mathcal{O}(h^{r+1})$, womit die Schärfe für den Fehler in der L^2 -Norm gezeigt ist. Wegen (3.51) bzw. (3.79) (und da hier Ω konvex ist) folgt

$$\|u_0 - (u_0)_h\|_{1,2,(0,1)^2} \geq c_1 h^{-1} \|u_0 - (u_0)_h\|_{L^2(0,1)^2} \geq c_2 h^r, \quad (4.66)$$

wohingegen Satz 3.17 nun $\|u_0 - (u_0)_h\|_{1,2,(0,1)^2} = \mathcal{O}(h^r)$ liefert. Schließlich läßt sich auch noch der Fehler in den Supremum-Normen auf den L^2 -Fehler zurückführen:

$$\begin{aligned} \|u_0 - (u_0)_h\|_{C[0,1]^2} &\geq \|u_0 - (u_0)_h\|_{L^2(0,1)^2} \geq c h^{r+1} \\ \|u_0 - (u_0)_h\|_{1,\infty,(0,1)^2} &\geq c_1 \|u_0 - (u_0)_h\|_{1,2,(0,1)^2} \geq c_2 h^r. \end{aligned}$$

Mit Folgerung 3.28 (beachte (3.90)) ergibt sich also auch hier die Schärfe im Fall $\omega(\delta) = \delta$, falls in der Fehlerabschätzung kein log-Faktor auftritt (d.h. $r > 1$).

4.3 Gegenbeispiele: Negative Normen

Die zum Beweis der Schärfe der L^2 -Fehlerschranken (Satz 3.17) angegebenen Gegenbeispiele liefern direkt auch einen Beitrag zur Güte der Abschätzungen (3.86)

$$\|u - u_h\|_{-\nu,2,\Omega} \leq C h^{\nu+2} \omega_{r-1}^{(2)}(h, u, L^2(\Omega))$$

in den negativen Normen (2.10), allerdings nur für $0 \leq \nu \leq 1$.

Folgerung 4.21 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, ein konvexes, polygonales Gebiet und die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ wie in (3.4), so daß zusätzlich zu $a_{\alpha,\beta} \in L^\infty(\Omega)$ gilt: $a_{\alpha,\beta} \in C^1(\bar{\Omega})$ für $|\beta| = 1$. Außerdem seien $V_h = V_h(r)$ mit $r > 1$ Ansatzfunktionenräume zu gleichmäßig regulären Triangulierungen, gebildet durch m -Simplexe vom Grad r , m -Rechtecke vom Grad r oder das Serendipity-Element (vom Grad $r = 2$). Dann existiert zu jedem abstrakten Stetigkeitsmodul ω mit $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$ eine Lösung $u_\omega \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ einer Aufgabe (3.5), so daß für $0 \leq \nu \leq 1$ gilt ($\delta \rightarrow 0+$, $h \rightarrow 0+$):*

$$\omega_{r-1}^{(2)}(\delta, u_\omega, L^2(\Omega)) = \mathcal{O}(\omega(\delta^{r-1})) \quad (4.67)$$

$$\|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{-\nu,2,\Omega} \neq o(h^{\nu+2} \omega(h^{r-1})). \quad (4.68)$$

Dabei ist $(u_\omega)_h$ die zu u_ω gehörige diskrete Lösung von (3.49).

Beweis Die Voraussetzungen sind so gewählt, daß wir die Sätze 3.17 und 4.14a) benutzen können. Sei u_ω das Gegenbeispiel aus Satz 4.14a). Damit geht (4.28) über in (4.67). Mit (2.22) und Lemma 2.25 erhalten wir zunächst für $0 < \nu < 1$

$$\begin{aligned} \|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{\nu,2,\Omega} &\leq C_{1,\nu} \|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{L^2(\Omega)}^{1-\nu} \|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{1,2,\Omega}^\nu \\ &\stackrel{(3.52),(3.54)}{\leq} C_{2,\nu} [h^2 \omega_{r-1}^{(2)}(h, u_\omega, L^2(\Omega))]^{1-\nu} [h \omega_{r-1}^{(2)}(h, u_\omega, L^2(\Omega))]^\nu \\ &= C_{2,\nu} h^{2-\nu} \omega_{r-1}^{(2)}(h, u_\omega, L^2(\Omega)), \end{aligned} \quad (4.69)$$

während diese Aussage für $\nu \in \{0, 1\}$ bereits (3.52) bzw. (3.54) ist. Wegen (4.29) existiert eine Folge $(h_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset (0, 1]$ mit $\lim_{j \rightarrow \infty} h_j = 0$ und

$$\|u_\omega - (u_\omega)_{h_j}\|_{L^2(\Omega)} \geq ch_j^2 \omega(h_j^{r-1}) > 0, \quad (4.70)$$

so daß insbesondere auch

$$u_\omega - (u_\omega)_{h_j} \neq 0. \quad (4.71)$$

Da $u_\omega - (u_\omega)_{h_j} \in W_0^{1,2}(\Omega) \subset W^{\nu,2}(\Omega)$, erhalten wir für hinreichend kleine h_j

$$\begin{aligned} \|u_\omega - (u_\omega)_{h_j}\|_{-\nu,2,\Omega} &= \sup_{0 \neq v \in W^{\nu,2}(\Omega)} \frac{(u_\omega - (u_\omega)_{h_j}, v)_{L^2(\Omega)}}{\|v\|_{\nu,2,\Omega}} \\ (4.71) \quad &\geq \frac{\|u_\omega - (u_\omega)_{h_j}\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|u_\omega - (u_\omega)_{h_j}\|_{\nu,2,\Omega}} \stackrel{(4.69)}{\geq} c_1 \frac{\|u_\omega - (u_\omega)_{h_j}\|_{L^2(\Omega)}^2}{h_j^{2-\nu} \omega_{r-1}^{(2)}(h_j, u_\omega, L^2(\Omega))} \\ (4.67) \quad &\geq c_2 \frac{\|u_\omega - (u_\omega)_{h_j}\|_{L^2(\Omega)}^2}{h_j^{2-\nu} \omega(h_j^{r-1})} \stackrel{(4.70)}{\geq} c_3 h_j^{\nu+2} \omega(h_j^{r-1}), \end{aligned}$$

so daß auch (4.68) gezeigt ist. ■

Insbesondere funktioniert das obige Argument auch im Fall $\omega(\delta) = \delta$, wenn statt u_ω das Gegenbeispiel u_0 aus Kapitel 4.2.3 verwendet wird. Für $\nu > 1$ ist aber i.a. $u - u_h \notin W^{\nu,2}(\Omega)$, so daß sich auf die Schärfe für höhere negative Normen so nicht schließen läßt. Wir beweisen aber auch die Schärfe für $\nu > 1$. Dazu könnte man den Fehler der besten Approximation $\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_{-\nu,2,\Omega}$ mit der Technik des Referenzelements analysieren. Für symmetrische Bilinearformen lassen sich Gegenbeispiele aber auch über den sogenannten „pollution effect“ (vgl. [93, S.425], siehe [9, S.141]) gewinnen: Zunächst ist

$$\begin{aligned} (f, u - u_h)_{L^2(\Omega)} &\stackrel{(3.5)}{=} a(u, u - u_h) = a(u - u_h, u) \\ &\stackrel{(2.57)}{=} a(u - u_h, u - u_h) \stackrel{(2.54)}{\geq} c \|u - u_h\|_{1,2,\Omega}^2. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Ist die Inhomogenität $f \neq 0$ der Aufgabe (3.5) schon in $W^{\nu,2}(\Omega)$, so gilt damit

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{-\nu,2,\Omega} &= \sup_{0 \neq v \in W^{\nu,2}(\Omega)} \frac{(u - u_h, v)_{L^2(\Omega)}}{\|v\|_{\nu,2,\Omega}} \\ &\geq \frac{(u - u_h, f)_{L^2(\Omega)}}{\|f\|_{\nu,2,\Omega}} \geq c \frac{\|u - u_h\|_{1,2,\Omega}^2}{\|f\|_{\nu,2,\Omega}} \end{aligned} \quad (4.73)$$

für eine Konstante $c > 0$. Damit kann $\|u - u_h\|_{-\nu,2,\Omega}$ in dieser Situation nicht schneller gegen Null konvergieren als $\|u - u_h\|_{1,2,\Omega}^2$. Im Hinblick auf (4.66) ist somit die Konvergenzordnung h^{2r} maximal.

Satz 4.22 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein konvexes, polygonales Gebiet und die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ aus (3.4) symmetrisch mit $a_{\alpha,\beta} \in C^r(\overline{\Omega})$ für $|\alpha| \leq 1$ und $|\beta| = 1$ sowie $a_{\alpha,0} \in C^{r-1}(\overline{\Omega})$*

für $|\alpha| \leq 1$. Dabei ist wieder $r > 1$ der Grad der Ansatzfunktionen V_h zu einer gleichmäßig regulären Familie von Triangulierungen (siehe (3.19)). Weiter sei $\mathbb{B} \subset [0, r-1]$ die Menge der ν , die die Regularitätsbedingung (3.85) in Satz 3.25 erfüllen, für die also die Fehlerschranke (3.86) gilt. Dann existiert zu jedem abstrakten Stetigkeitsmodul ω mit $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$ eine Lösung $u_\omega \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ einer Aufgabe (3.5) (vgl. Lemma 4.13), so daß für jedes $\nu \in \mathbb{B}$ gilt ($\delta \rightarrow 0+$, $h \rightarrow 0+$):

$$\begin{aligned} \omega_{r-1}^{(2)}(\delta, u_\omega, L^2(\Omega)) &= \mathcal{O}(\omega(\delta^{r-1})) \\ \|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{-\nu, 2, \Omega} &\neq o(h^{\nu+2}\omega(h^{r-1})). \end{aligned}$$

Das Gegenbeispiel läßt sich also für alle $\nu \in \mathbb{B}$ identisch wählen.

Beweis Die Aussage folgt als Anwendung von Satz 2.31. Wir setzen ($h = 1/n$)

$$\begin{aligned} X &= W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega), \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{2,2,\Omega}, \quad \varphi_n = \frac{1}{n^{r-1}} = h^{r-1}, \quad \sigma(\delta) = \delta^{r-1}, \\ S_\delta u &= \omega_{r-1}^{(2)}(\delta, u, L^2(\Omega)), \quad T_{n,\nu} u = n^{\nu+2} \|u - u_h\|_{-\nu, 2, \Omega} \text{ für } \nu \in \mathbb{B}_n = \mathbb{B}, \\ g_n(x) &= n^{-2+\frac{m}{2}} \tilde{g}_n(x), \end{aligned}$$

wobei $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge aus Lemma 4.17 ist. Die Fehlerfunktionale $T_{n,\nu}$ messen jetzt nicht mehr einen Fehler der besten Approximation, sondern den tatsächlichen Finite-Elemente-Fehler. Das ist nötig, um den „pollution-effect“ auszunutzen. Dabei beachte man, daß wieder wegen Lemma 4.17 jedes $u \in X$ Lösung einer Aufgabe (3.5) ist, so daß wir die Schreibweise u_h statt $P_h u$ verwenden. Wegen

$$\begin{aligned} T_{n,\nu} u &\stackrel{(2.10)}{\leq} n^{\nu+2} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq n^{\nu+2} \|u - u_h\|_{1,2,\Omega} \stackrel{(2.58)}{\leq} C n^{\nu+2} \inf_{v \in V_{1/n}} \|u - v\|_{1,2,\Omega} \\ &\stackrel{0 \in V_{1/n}}{\leq} C n^{\nu+2} \|u\|_{1,2,\Omega} \leq C n^{\nu+2} \|u\|_{2,2,\Omega} \quad \forall u \in X, \nu \in \mathbb{B}, \end{aligned}$$

ist $T_{n,\nu} \in X^\sim$ und $\|T_{n,\nu}\|_{X^\sim} \leq C n^{\nu+2}$, wobei die Konstante C von ν und n unabhängig ist. Damit ist insbesondere (2.34) gezeigt. (2.32) folgt aus (4.45) und (2.33) aus (4.47) für $j = r-1$ und $s = 2$. Die Voraussetzungen sind so gewählt, daß die Fehlerabschätzung Satz 3.25 benutzt werden kann. Damit erhalten wir (2.35) (vgl. (2.39)):

$$\begin{aligned} T_{n,\nu} g_j &\stackrel{(3.86)}{\leq} C_{1,\nu} n^{\nu+2} \frac{1}{n^{\nu+2}} \omega_{r-1}^{(2)} \left(\frac{1}{n}, g_j, L^2(\Omega) \right) \\ &\stackrel{\text{Lemma 2.16e}}{\leq} C_{2,\nu} \frac{1}{n^{r-1}} |g_j|_{r+1,2,\Omega} = C_{2,\nu} C_j \varphi_n. \end{aligned}$$

Es bleibt die Resonanzbedingung (2.36) zu verifizieren. Nach Lemma 4.13 ist g_n Lösung der Aufgabe

$$a(g_n, v) = (f_n, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in W_0^{1,2}(\Omega)$$

mit (siehe (4.27))

$$f_n = \sum_{|\alpha| \leq 1} a_{\alpha,0} D^\alpha g_n - \sum_{|\alpha| \leq 1, |\beta|=1} D^\beta (a_{\alpha,\beta} D^\alpha g_n).$$

Die Voraussetzungen an die Koeffizienten $a_{\alpha,\beta}$ sichern, daß $f_n \in W^{r-1,2}(\Omega) \subset W^{\nu,2}(\Omega)$.
Genauer ergibt sich für $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq r-1$, mit der Leibniz-Regel

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{k,2,\Omega} &\leq \sum_{|\gamma| \leq k} \left[\sum_{|\alpha| \leq 1} \sum_{\zeta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\zeta} \|D^\zeta a_{\alpha,0}\|_{C(\bar{\Omega})} \|D^{\gamma-\zeta+\alpha} g_n\|_{L^2(\Omega)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{|\alpha| \leq 1, |\beta|=1} \sum_{\lambda \leq \beta} \sum_{\zeta \leq \gamma} \binom{\beta}{\lambda} \binom{\gamma}{\zeta} \|D^{\lambda+\zeta} a_{\alpha,\beta}\|_{C(\bar{\Omega})} \|D^{\gamma-\zeta+\beta-\lambda+\alpha} g_n\|_{L^2(\Omega)} \right] \\ &\leq C_1 \|g_n\|_{k+2,2,\Omega} = C_1 n^{-2+\frac{m}{2}} \|\tilde{g}_n\|_{k+2,2,\Omega} \stackrel{\text{vgl. (2.3)}}{\leq} C_1 n^{-2+\frac{m}{2}} \sum_{j=0}^{k+2} |\tilde{g}_n|_{j,2,\Omega} \\ &\stackrel{(4.39)}{\leq} C_2 n^{-2+\frac{m}{2}+k+2-\frac{m}{2}} = C_2 n^k, \end{aligned} \quad (4.74)$$

wobei die Konstanten von n unabhängig sind. Insbesondere ist demnach

$$\|f_n\|_{\nu,2,\Omega} \leq C_\nu n^\nu, \quad (4.75)$$

denn $\nu \in [0, r-1]$, und für $\nu \in \{0, r-1\}$ ist dies unmittelbar (4.74), während wir zusätzlich (2.22) (mit $s_1 = 0$, $s_2 = r-1$, $\nu = \Theta(r-1)$) und Lemma 2.25 im Fall $\nu \in (0, r-1)$ benutzt haben. Sei $(g_n)_h$ die zu g_n bzw. f_n gehörende Lösung von $a((g_n)_h, v) = (f_n, v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in V_{1/n}$. Dann ist zunächst nach (4.42):

$$\begin{aligned} \|g_n - (g_n)_h\|_{1,2,\Omega} &\geq \inf_{v \in V_{1/n}} \|g_n - v\|_{1,2,\Omega} = n^{-2+\frac{m}{2}} \inf_{v \in V_{1/n}} \|\tilde{g}_n - v\|_{1,2,\Omega} \\ &\stackrel{(4.42)}{\geq} c n^{-2+\frac{m}{2}+1-\frac{m}{2}} = c n^{-1} > 0. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Damit ergibt sich mit (4.72)

$$(f_n, g_n - (g_n)_h)_{L^2(\Omega)} \geq c \|g_n - (g_n)_h\|_{1,2,\Omega}^2 > 0,$$

so daß $f_n \neq 0$. Damit können wir (4.73) benutzen und erhalten

$$\begin{aligned} T_{n,\nu} g_n &= n^{\nu+2} \|g_n - (g_n)_h\|_{-\nu,2,\Omega} \stackrel{(4.73)}{\geq} c_1 n^{\nu+2} \frac{\|g_n - (g_n)_h\|_{1,2,\Omega}^2}{\|f_n\|_{\nu,2,\Omega}} \\ &\stackrel{(4.76)}{\geq} c_2 n^{\nu+2} \frac{n^{-2}}{\|f_n\|_{\nu,2,\Omega}} \stackrel{(4.75)}{\geq} c_{3,\nu} n^{\nu+2} \frac{n^{-2}}{n^\nu} = c_{3,\nu} > 0 \end{aligned} \quad (4.77)$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten c_3 . Damit ist auch (2.36) gezeigt, so daß nach Satz 2.31 das gewünschte Gegenbeispiel $u_\omega \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ existiert. Dabei beachte man noch, daß $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{B}_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{B} = \mathbb{B}$. ■

Im Fall $\nu = 0$ ist die Aussage von Satz 4.22 natürlich ein Spezialfall von Satz 4.14a), der Schärfeaussage für den Fehler in der L^2 -Norm. Da die Gegenbeispiele unabhängig von der konkreten negativen Norm gewählt werden können, bietet sich der folgende Vergleich an:

Folgerung 4.23 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.22 existiert zu jedem abstrakten Stetigkeitsmodul ω mit $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$ und jedem Paar $\nu_1 > \nu_2$, $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{B}$, ein Gegenbeispiel $u_\omega \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$, so daß $(\delta \rightarrow 0+, h \rightarrow 0+)$:*

$$\omega_{r-1}^{(2)}(\delta, u_\omega, L^2(\Omega)) = \mathcal{O}(\omega(\delta^{r-1})) \quad (4.78)$$

$$\|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{-\nu_2, 2, \Omega} \neq o(h^{\nu_2+2}\omega(h^{r-1})) \quad (4.79)$$

$$\|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{-\nu_1, 2, \Omega} \neq o(h^{\nu_1-\nu_2}\|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{-\nu_2, 2, \Omega}). \quad (4.80)$$

Beweis Nach Satz 4.22 existiert ein Gegenbeispiel u_ω , so daß (4.78), (4.79) und

$$\|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{-\nu_1, 2, \Omega} \neq o(h^{\nu_1+2}\omega(h^{r-1})) \quad (4.81)$$

erfüllt sind. Außerdem ist nach Satz 3.25

$$\begin{aligned} \|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{-\nu_2, 2, \Omega} &\leq C_1 h^{\nu_2+2} \omega_{r-1}^{(2)}(h, u_\omega, L^2(\Omega)) \\ &\stackrel{(4.78)}{\leq} C_2 h^{\nu_2+2} \omega(h^{r-1}) \end{aligned} \quad (4.82)$$

für hinreichend kleine h . Falls (4.80) nicht gilt, gäbe es eine Funktion $\varphi : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{h \rightarrow 0+} \varphi(h) = 0$ und

$$\|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{-\nu_1, 2, \Omega} \leq C_1 \varphi(h) h^{\nu_1-\nu_2} \|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{-\nu_2, 2, \Omega} \stackrel{(4.82)}{\leq} C_2 \varphi(h) h^{\nu_1+2} \omega(h^{r-1}),$$

im Widerspruch zu (4.81). ■

Im Fall $\omega(\delta) = \delta$ ist die Schärfe im Spezialfall $0 \leq \nu \leq 1$ (vgl. Folgerung 4.21) unproblematisch. Daneben ist der Fall $\nu = r-1$ als Endpunkt der direkten Abschätzung ausgezeichnet, da sich hier das Gegenbeispiel über den „pollution effect“ konstruieren läßt (vgl. (4.73)). Für alle $\nu \in \mathbb{B}$ erhalten wir darüber hinaus immerhin sofort noch asymptotische Schärfe (vgl. (1.14)) im Sinne von

Folgerung 4.24 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.22 existiert eine Folge $(u_n)_{n=1}^\infty \subset C_0(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\mathbb{R}^m)$, so daß es für jedes $\nu \in \mathbb{B}$ Konstanten $0 < c, C < \infty$ gibt mit $(h = 1/n)$:*

$$\|u_n - (u_n)_h\|_{-\nu, 2, \Omega} \leq Ch^{\nu+r+1} |u_n|_{r+1, 2, \Omega} \quad (4.83)$$

$$\|u_n - (u_n)_h\|_{-\nu, 2, \Omega} \geq ch^{\nu+r+1} |u_n|_{r+1, 2, \Omega}. \quad (4.84)$$

Beweis Sei $u_n := n^{-(r-1)} g_n$, wobei $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Resonanzelemente aus dem Beweis von Satz 4.22 ist, d.h., $u_n(x) = n^{-r-1+m/2} \tilde{g}_n(x)$ mit der Folge $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus Lemma 4.17. Wegen (4.39) ist $|u_n|_{r+1, 2, \Omega} \leq C_0$, unabhängig von n , und mit (4.77) folgt dann sofort (4.84):

$$\begin{aligned} \|u_n - (u_n)_h\|_{-\nu, 2, \Omega} &= n^{-(r-1)} \|g_n - (g_n)_h\|_{-\nu, 2, \Omega} \stackrel{(4.77)}{\geq} c_1 n^{-(r-1)} n^{-(\nu+2)} \\ &= c_1 h^{\nu+r+1} \geq \frac{c_1}{C_0} h^{\nu+r+1} |u_n|_{r+1, 2, \Omega}. \end{aligned}$$

Schließlich liefert Satz 3.25:

$$\|u_n - (u_n)_h\|_{-\nu, 2, \Omega} \leq C_1 h^{\nu+2} \omega_{r-1}^{(2)}(h, u_n, L^2(\Omega)) \leq C_2 h^{\nu+r+1} |u_n|_{r+1, 2, \Omega}.$$

■

Wir können die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aber nicht mit einem Resonanzprinzip zu einem Gegenbeispiel kondensieren.

4.4 Gegenbeispiele: Lineare Ansatzfunktionen und Supremum-Norm

Bei der Analyse der Schärfe der sup-Norm-Fehlerschranken aus Folgerung 3.28 wurde bislang der Fall $r = 1$, bei dem ein zusätzlicher log-Faktor auftritt, ausgespart (siehe (3.99)):

$$\|u - u_h\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C |\log h| \omega_2(h, u, C(\overline{\Omega})).$$

Wir greifen nun die Ideen von Haverkamp aus [52] auf, um auch zu dieser Fehlerabschätzung entsprechende Gegenbeispiele zu konstruieren. Dabei gehen wir von möglichst einfachen Daten aus. Zu $\Omega = (0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$ sei wie schon zuvor die gleichmäßig reguläre Familie von Triangulierungen (3.17) gegeben. Insbesondere werden wir explizit nur die Parameter $h = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, benutzen, für die die Darstellung (3.12) gilt: $\mathcal{T}_h = \{K_{j,l}^i : 1 \leq j, l \leq n, i = 0, 1\}$. Die Ansatzfunktionenräume $V_h = V_h(1)$ bestehen aus stückweise linearen Funktionen, und die zugehörigen Basisfunktionen sind in (3.33) angegeben. Damit ist zu jedem $u \in C_0(\overline{\Omega})$ eine Lösung $u_h \in V_h$ von (3.89) eindeutig festgelegt, wobei sich die in (3.89) benutzte Bilinearform aus dem Laplace-Operator ergibt (siehe (3.87)).

Die Notwendigkeit des Logarithmus-Faktors in der Fehlerabschätzung (3.99) des Problems (3.89) wird in [52] bewiesen. Genauer wird dort für eine unwesentlich andere Familie von Triangulierungen gezeigt, daß es eine Konstante $c > 0$ gibt, so daß zu jedem $h = 1/(2n)$ eine Funktion $u_n \in C_0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\overline{\Omega})$ existiert mit

$$\|u_n - (u_n)_h\|_{C(\overline{\Omega})} > ch^2 |\log h| |u_n|_{2, \overline{\Omega}}. \quad (4.85)$$

Dies ist also eine asymptotische Schärfe im Fall $\omega(\delta) = \delta$ (vgl. (1.14), Folgerung 4.24). Die im Beweis dieser Aussage explizit konstruierte Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wird von Lüttgens in [67, Kapitel 4.5] aufgegriffen und als Resonanzfolge für die Anwendung des Beschränktheitsprinzips Satz 2.30 interpretiert. Das Ergebnis ist die Schärfe im Sinne von Gegenbeispielen im Fall $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(\delta)/\delta = \infty$ (siehe [67, S.185]):

Zu jedem abstrakten Stetigkeitsmodul ω mit $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(\delta)/\delta = \infty$ existiert eine Funk-

tion $u_\omega \in C_0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit⁴ ($\delta \rightarrow 0+$, $h \rightarrow 0+$)

$$\begin{aligned}\omega_1^{(1)}(\delta, u_\omega, C(\overline{\Omega})) &= \mathcal{O}(\omega(\delta)) \\ \|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{C(\overline{\Omega})} &\neq o(h|\log h|\omega(h)).\end{aligned}\tag{4.86}$$

Aus den so formulierten Ergebnissen läßt sich nicht schließen, daß die Supremum-Norm des Fehlers durch den Fehler in einem festen Punkt ersetzt werden kann. In den Beweisen wird aber die Abschätzung nach unten gerade an der Stelle $(1/2, 1/2)$ aufgebaut. Wir wollen hier jetzt einen Schritt weiter gehen und die Schärfe auf einer in $[0, 1]^2$ dichten Menge \mathbb{B} beweisen (vgl. [48]).

Satz 4.25 *Sei*

$$\mathbb{B} := \left\{ \left(\frac{i}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right) : 1 \leq i, j \leq 2^n - 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zu jedem abstrakten Stetigkeitsmodul ω mit $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$ und $s \in \{0, 1\}$ existiert ein Gegenbeispiel $u_\omega \in C_0(\overline{\Omega}) \cap C^s(\overline{\Omega})$, so daß ($\delta \rightarrow 0+$, $h \rightarrow 0+$)

$$\begin{aligned}\omega_{2-s}^{(s)}(\delta, u_\omega, C(\overline{\Omega})) &= \mathcal{O}(\omega(\delta^{2-s})) \\ |(u_\omega - (u_\omega)_h)(\eta)| &\neq o(h^s |\log h| \omega(h^{2-s})) \quad \forall \eta \in \mathbb{B},\end{aligned}\tag{4.87}$$

womit die Schärfe der Fehlerabschätzung (3.99) punktweise auf der in $[0, 1]^2$ dichten Menge \mathbb{B} gezeigt ist.

(4.87) bedeutet also, daß zu jedem $\eta \in \mathbb{B}$ eine von η abhängige Konstante $c_\eta > 0$ existiert, mit

$$\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{|(u_\omega - (u_\omega)_h)(\eta)|}{h^s |\log h| \omega(h^{2-s})} \geq c_\eta.$$

Die Abhängigkeit vom Punkt η kann dabei nicht aufgehoben werden, worauf wir im Anschluß an den Beweis kurz eingehen. Für $s = 1$ folgt aus Satz 4.25 insbesondere natürlich auch (4.86).

Wir verwenden im Beweis die Ideen aus [52], aber entgegen der dortigen Darstellung folgen wir [67] und benutzen die Terminologie der Differenzenverfahren und damit der diskreten Green-Funktionen. Damit zeigt sich zum einen die Nähe zu Schärfeüberlegungen bei Differenzenverfahren (siehe insbesondere [43, 68], wo u.a. das Auftreten eines log-Faktors bei Fehlerabschätzungen gegen τ -Moduln untersucht wird). Andererseits haben wir sofort Ergebnisse (z.B. Negativität der diskreten Green-Funktion) zur Verfügung, die sich als wesentlich erweisen. Daneben werden wir zum Abschluß des Kapitels noch mittels einer Fehlerabschätzung für ein Differenzenverfahren zeigen, daß der log-Faktor bei sehr glatten Lösungen u entfällt.

⁴Eigentlich wird in [67] der gemischte Modul $\overline{\omega}_1^{(1)}$ verwendet, der aber als Konsequenz der Kemperman-Identität (Lemma A.3) auf $\overline{\Omega}$ zum hier benutzten radialen $\omega_1^{(1)}$ äquivalent ist.

Wir beginnen mit der Definition der benötigten Gitter und Differenzenoperatoren. Seien jetzt $h = 1/n$ und $\bar{\Omega}_h := \{(x_1, x_2) : x_1 = i/n, x_2 = j/n, 0 \leq i, j \leq n\}$ sowie $\Omega_h := \Omega \cap \bar{\Omega}_h$ und $\Gamma_h := \bar{\Omega}_h \cap \partial\Omega$ (vgl. mit den Bezeichnungen (3.21)). Als Approximation des Laplace-Operators betrachten wir für (reellwertige) Funktionen auf $\bar{\Omega}_h$ den Fünf-Punkte-Differenzenoperator ($(x_1, x_2) \in \Omega_h$)

$$\begin{aligned} \Delta_h y_h(x_1, x_2) &:= \\ &h^{-2}[y_h(x_1 + h, x_2) + y_h(x_1 - h, x_2) + y_h(x_1, x_2 + h) + y_h(x_1, x_2 - h) - 4y_h(x_1, x_2)], \end{aligned} \quad (4.88)$$

den wir auf $\bar{\Omega}_h$ fortsetzen durch

$$A_h y_h(\xi) := \begin{cases} \Delta_h y_h(\xi) & \forall \xi \in \Omega_h \\ 0 & \forall \xi \in \Gamma_h. \end{cases}$$

Dieser Differenzenoperator erfüllt das folgende Maximumprinzip (siehe z.B. [57, S.463]):

Lemma 4.26 *Ist y_h eine Funktion auf $\bar{\Omega}_h$ mit $\Delta_h y_h(\xi) \geq 0$ für jedes $\xi \in \Omega_h$, so gilt:*

$$\max_{\xi \in \Omega_h} y_h(\xi) \leq \max_{\xi \in \Gamma_h} y_h(\xi). \quad (4.89)$$

Sei $V_h^\sharp := \{y_h : \bar{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R}, y_h = 0 \text{ auf } \Gamma_h\}$. Zu jeder Funktion f_h auf Ω_h existiert eine eindeutige Lösung $y_h \in V_h^\sharp$ der folgenden Differenzengleichung (siehe z.B. [57, S.464])

$$\Delta_h y_h(\xi) = A_h y_h(\xi) = f_h(\xi) \quad \forall \xi \in \Omega_h. \quad (4.90)$$

Damit ist A_h auf V_h^\sharp invertierbar, und wir interessieren uns für eine geeignete Darstellung von A_h^{-1} . Diese ermöglicht uns die diskrete Green-Funktion G_h auf $\bar{\Omega}_h \times \Omega_h$. Sie ist als (eindeutig existierende) Lösung der obigen Differenzengleichung für konkrete Inhomogenitäten f_h definiert. Für festes $\eta \in \Omega_h$ ist genauer $G_h(\cdot, \eta) \in V_h^\sharp$ bestimmt durch

$$[\Delta_h G_h(\cdot, \eta)](\xi) = [A_h G_h(\cdot, \eta)](\xi) = \delta_\eta(\xi) \quad \forall \xi \in \Omega_h, \quad (4.91)$$

wobei $\delta_\eta \in V_h^\sharp$ mit $\delta_\eta(\xi) = 1$, falls $\xi = \eta$ und $\delta_\eta(\xi) = 0$ falls $\xi \neq \eta$.

Als direkte Konsequenz von Lemma 4.26 erhalten wir

$$G_h(\xi, \eta) \leq 0 \quad \forall \xi \in \bar{\Omega}_h, \eta \in \Omega_h. \quad (4.92)$$

Mit der diskreten Green-Funktion lassen sich Gitterfunktionen darstellen:

Lemma 4.27 *(siehe [51, S.58]) Für Funktionen $y_h \in V_h^\sharp$ gilt die folgende Darstellung:*

$$y_h(\xi) = \sum_{\eta \in \Omega_h} G_h(\xi, \eta) \Delta_h y_h(\eta) = \sum_{\eta \in \Omega_h} G_h(\xi, \eta) A_h y_h(\eta) \quad \forall \xi \in \bar{\Omega}_h. \quad (4.93)$$

Beweis Bezeichnen wir die rechte Seite von (4.93) mit $w_h(\xi)$, so ist wegen $G_h(\cdot, \eta) \in V_h^\sharp$ auch $w_h \in V_h^\sharp$ und

$$\Delta_h w_h(\xi) = \sum_{\eta \in \Omega_h} [\Delta_h G_h(\cdot, \eta)](\xi) \Delta_h y_h(\eta) \stackrel{(4.91)}{=} \sum_{\eta \in \Omega_h} \delta_\eta(\xi) \Delta_h y_h(\eta) = \Delta_h y_h(\xi)$$

auf Ω_h . Damit folgt aus der eindeutigen Lösbarkeit von (4.90) die Behauptung. \blacksquare

Da der Fehler bei Differenzenverfahren selbst eine Gitterfunktion aus V_h^\sharp ist, eignet sich das Lemma auch für eine Darstellung dieses Fehlers (vgl. [11]–[15], [42]–[44], [67] und Anhang B.1). Wir haben jetzt folgende Darstellung für A_h^{-1} :

Folgerung 4.28 Für Funktionen $y_h \in V_h^\sharp$ gilt:

$$A_h^{-1} y_h(\xi) = \sum_{\eta \in \Omega_h} G_h(\xi, \eta) y_h(\eta) \quad \forall \xi \in \bar{\Omega}_h. \quad (4.94)$$

Beweis Wir bezeichnen die rechte Seite von (4.94) mit $B_h y_h(\xi)$. Da A_h auf V_h^\sharp bijektiv ist, ist nur $B_h A_h y_h = y_h$ zu zeigen, was aber nach (4.93) klar ist. \blacksquare

Insbesondere erhalten wir damit für $y_h = \delta_\eta$, $\eta \in \Omega_h$:

$$G_h(\xi, \eta) = (A_h^{-1} \delta_\eta)(\xi) \quad \forall \xi \in \bar{\Omega}_h. \quad (4.95)$$

Der Kern des Beweises von Satz 4.25 ist eine Abschätzung des Fehlers nach unten gegen einen Funktionswert der diskreten Green-Funktion, für dessen Betrag wir jetzt seinerseits eine untere Schranke herleiten. Dazu wird die diskrete Green-Funktion nach einem Orthogonalsystem von Eigenfunktionen von A_h^{-1} entwickelt (vgl. [43, 52], [67, S.127ff]).

Sei für $1 \leq i, j \leq n-1$ und $(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}_h$:

$$z_{i,j}(x_1, x_2) := \sin i\pi x_1 \sin j\pi x_2. \quad (4.96)$$

Dann ist $z_{i,j} \in V_h^\sharp$ und

$$A_h z_{i,j}(\xi) = \lambda_{i,j} z_{i,j}(\xi) \quad \forall \xi \in \bar{\Omega}_h \quad (4.97)$$

mit

$$\lambda_{i,j} = -4n^2 \left[\sin^2 \left(\frac{i\pi}{2n} \right) + \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2n} \right) \right]. \quad (4.98)$$

Also ist $A_h^{-1} z_{i,j} = \lambda_{i,j}^{-1} z_{i,j}$. Der Beweis dieser Aussage besteht in einer elementaren Anwendung der Additionstheoreme für die trigonometrischen Funktionen – siehe z.B. [67, S.127]. Mit dem auf V_h^\sharp definierten Skalarprodukt ($v_{h,1}, v_{h,2} \in V_h^\sharp$)

$$(v_{h,1}, v_{h,2})_h := \sum_{\eta \in \Omega_h} v_{h,1}(\eta) v_{h,2}(\eta)$$

folgt (vgl. [43, 52], [67, S.128])

$$(z_{i_1, j_1}, z_{i_2, j_2})_h = \frac{n^2}{4} \delta_{i_1, i_2} \delta_{j_1, j_2}, \quad (4.99)$$

wobei $\delta_{i,j} = 1$ für $i = j$ und sonst 0 ist. Da $\dim V_h^\sharp = (n-1)^2$, ist $\{z_{i,j} : 1 \leq i, j \leq n-1\}$ eine Orthogonalbasis von V_h^\sharp , und jedes $y_h \in V_h^\sharp$ läßt sich so entwickeln:

$$y_h = \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{(y_h, z_{i,j})_h}{(z_{i,j}, z_{i,j})_h} z_{i,j} = \frac{4}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n-1} (y_h, z_{i,j})_h z_{i,j}. \quad (4.100)$$

Damit können wir nun die angestrebte Abschätzung beweisen:

Lemma 4.29 *Sei $\xi \in (0, 1)^2$. Dann existiert eine von h unabhängige Konstante $c = c_\xi > 0$, so daß für alle $h = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\xi \in \Omega_h$ gilt:*

$$|G_h(\xi, \xi)| = -G_h(\xi, \xi) \geq ch^2 |\log h|. \quad (4.101)$$

Beweis Zum gegebenen ξ existiere ein h mit $\xi \in \Omega_h$. Dann hat ξ die (von h unabhängige) Darstellung $\xi = (\xi_1, \xi_2) = (p_1/q_1, p_2/q_2)$ für Zahlen $p_l, q_l \in \mathbb{N}$, $p_l < q_l$, $l = 1, 2$. Nun ist $\sin j\pi \frac{p_l}{q_l} = 0$ für ein $j \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn j ein ganzzahliges Vielfaches von

$$N_l := \frac{\text{kgV}(p_l, q_l)}{p_l}$$

ist. Wir beweisen dies kurz: Gilt einerseits $j = k \text{kgV}(p_l, q_l)/p_l$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so ist $j\pi p_l/q_l = k\pi \underbrace{\text{kgV}(p_l, q_l)/q_l}_{\in \mathbb{N}}$ und $\sin j\pi p_l/q_l = 0$. Sei andererseits $\sin j\pi p_l/q_l = 0$, so ist $j p_l/q_l \in \mathbb{N}$ und $q_l | j p_l$ (q_l teilt $j p_l$). Offensichtlich gilt auch $p_l | j p_l$, so daß $\text{kgV}(p_l, q_l) | j p_l$, also $j p_l = k \text{kgV}(p_l, q_l)$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Damit ist j Vielfaches von $\text{kgV}(p_l, q_l)/p_l$.

Man beachte, daß $N_l \in \mathbb{N}$ mit $N_l > 1$ wegen $p_l < q_l \leq \text{kgV}(p_l, q_l)$. Damit ist

$$\begin{aligned} M_l = M_{l,\xi} &:= \inf \left\{ \sin^2 j\pi \frac{p_l}{q_l} : j \in \mathbb{N}, N_l \nmid j \right\} \\ &= \inf \left\{ \sin^2 j\pi \frac{p_l}{q_l} : j = k + i N_l, 1 \leq k < N_l, i \in \mathbb{N}_0 \right\} \\ &= \inf \left\{ \sin^2 \left[k\pi \frac{p_l}{q_l} + i\pi N_l \frac{p_l}{q_l} \right] : 1 \leq k < N_l, i \in \mathbb{N}_0 \right\} \\ &= \min \left\{ \sin^2 k\pi \frac{p_l}{q_l} : 1 \leq k < N_l \right\} \\ &> 0, \end{aligned} \quad (4.102)$$

und wir erhalten, falls $\xi \in \Omega_h$,

$$|G_h(\xi, \xi)| \stackrel{(4.92)}{=} -G_h(\xi, \xi) \stackrel{(4.95)}{=} -(A_h^{-1} \delta_\xi)(\xi)$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(4.100)}{=} - \left[A_h^{-1} \left(\frac{4}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n-1} (\delta_\xi, z_{i,j})_h z_{i,j} \right) \right] (\xi) = -\frac{4}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n-1} z_{i,j}(\xi) (A_h^{-1} z_{i,j})(\xi) \\
& \stackrel{(4.97)}{=} -\frac{4}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n-1} z_{i,j}(\xi) \frac{z_{i,j}(\xi)}{\lambda_{i,j}} \stackrel{(4.98)}{=} \frac{4}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\sin^2 i\pi\xi_1 \sin^2 j\pi\xi_2}{4n^2 \left[\sin^2 \left(\frac{i\pi}{2n} \right) + \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2n} \right) \right]} \\
& = \frac{1}{n^4} \sum_{\substack{i,j=1 \\ N_1 \nmid i, N_2 \nmid j}}^{n-1} \frac{\sin^2 i\pi\xi_1 \sin^2 j\pi\xi_2}{\sin^2 \left(\frac{i\pi}{2n} \right) + \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2n} \right)} \stackrel{(4.102)}{\geq} \frac{M_1 M_2}{n^4} \sum_{\substack{i,j=1 \\ N_1 \nmid i, N_2 \nmid j}}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{i\pi}{2n} \right) + \sin^2 \left(\frac{j\pi}{2n} \right)} \\
& \geq \frac{M_1 M_2}{\pi^2 n^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ N_1 \nmid i, N_2 \nmid j}}^{n-1} \frac{4}{i^2 + j^2} \geq \frac{M_1 M_2}{\pi^2 n^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ N_1 \nmid i, N_2 \nmid j}}^{n-1} \left[\frac{2}{i^2 + j^2} + \frac{2}{(i+1)^2 + j^2} \right] \\
& \stackrel{N_1 > 1}{\geq} \frac{M_1 M_2}{\pi^2 n^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ N_2 \nmid j}}^{n-1} \frac{2}{i^2 + j^2},
\end{aligned}$$

denn da $N_1 > 1$ ist, gilt: Aus $N_1 | (i+1)$ folgt $N_1 \nmid i$. Damit ist aber jetzt auch der Summand $2/[(i+1)^2 + j^2]$ in der Summe enthalten und die Bedingung $N_1 \nmid i$ nicht nötig. Weiter ist

$$\begin{aligned}
|G_h(\xi, \xi)| &= -G_h(\xi, \xi) \\
&\geq \frac{M_1 M_2}{\pi^2 n^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ N_2 \nmid j}}^{n-1} \left[\frac{1}{i^2 + j^2} + \frac{1}{i^2 + (j+1)^2} \right] \stackrel{N_2 > 1}{\geq} \frac{M_1 M_2}{\pi^2 n^2} \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{i^2 + j^2}.
\end{aligned}$$

Da aber $\sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{1}{i^2 + j^2} \geq \frac{1}{2} \log n$ haben wir insgesamt $-G_h(\xi, \xi) \geq \frac{M_1 M_2}{2\pi^2 n^2} \log n$ (siehe z.B. [67, S.131]). \blacksquare

Wir erläutern als nächstes den Zusammenhang zwischen dem Differenzenoperator Δ_h und der Aufgabe (3.89). Nach Wahl der Triangulierung \mathcal{T}_h ist (vgl. (3.10), (3.12), (3.21)) $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{M}_{K,1}$. Wir betrachten nun die übliche Standardbasis (3.22) von $V_h(1)$, und zu $\eta \in \Omega_h$ sei $\varphi_{h,\eta}$ das Basiselement (3.33) mit $\varphi_{h,\eta}(\eta) = 1$ und $\varphi_{h,\eta}(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \bar{\Omega}_h \setminus \{\eta\}$. Dann gilt bekanntermaßen (siehe [51, S.160]) für $\xi \in \Omega_h$

$$\tilde{a}(\varphi_{h,\eta}, \varphi_{h,\xi}) \stackrel{(3.90)}{=} a(\varphi_{h,\eta}, \varphi_{h,\xi}) = \begin{cases} -1 & \text{für } \eta \in \mathbb{S}(\xi) \cap \Omega_h \\ 4 & \text{für } \eta = \xi \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (4.103)$$

wobei $\mathbb{S}(\xi) := \{(\xi_1 \pm h, \xi_2), (\xi_1, \xi_2 \pm h)\}$. Aus (4.103) folgt für jedes $v \in V_h$ und $\xi \in \Omega_h$:

$$\begin{aligned}
a(v, \varphi_{h,\xi}) &\stackrel{(3.24)}{=} \sum_{\eta \in \Omega_h} v(\eta) a(\varphi_{h,\eta}, \varphi_{h,\xi}) \\
&\stackrel{(4.103), v|_{\Gamma_h} = 0}{=} 4v(\xi) - \sum_{\eta \in \mathbb{S}(\xi)} v(\eta) \stackrel{(4.88)}{=} -h^2 \Delta_h v(\xi). \quad (4.104)
\end{aligned}$$

Die Triangulierungen (3.12) sind so gleichmäßig aufgebaut, daß sich die Basisfunktionen $\varphi_{h,\eta}$ und $\varphi_{h,\xi}$ zu $\eta, \xi \in \Omega_h$ durch eine Translation ineinander überführen lassen. Dies gilt bei gleichmäßig regulären Triangulierungen selbst bei Verwendung affiner Transformationen statt Translationen nicht generell.

Lemma 4.30 *Seien $\eta, \xi \in \Omega_h$ und $h = 1/n$. Dann gilt:*

$$\varphi_{h,\eta}(x) = \varphi_{h,\xi}(x + \xi - \eta). \quad (4.105)$$

Folglich ist $\text{Tr } \varphi_{h,\xi} = \{x : x = y + \xi - \eta, y \in \text{Tr } \varphi_{h,\eta}\}$.

Beweis Die Träger von $\varphi_{h,\eta}$ und $\varphi_{h,\xi}$ setzen sich aus jeweils sechs Dreiecken zusammen (siehe (3.32)), die vermöge der (gemeinsamen) Translation $Fx := x + \xi - \eta$ ineinander überführt werden. Nach (3.41) gehen damit die zugehörigen lokalen Basisfunktionen (vgl. (3.23)) ineinander über. Da sich $\varphi_{h,\eta}$ und $\varphi_{h,\xi}$ aber gerade daraus zusammensetzen, gilt (4.105). ■

Der Beweis des Satzes 4.25 basiert auf dem Beschränktheitsprinzip Satz 2.31. Die dazu erforderliche Resonanzfolge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruieren wir als Linearkombination von Translationen der Folge aus [52], der hier bis auf Vorfaktoren die Folge $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ entspricht:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_n(x_1, x_2) &:= \tilde{f}_n(x_1) \tilde{f}_n(x_2) \\ \tilde{f}_n(x) &:= \sin\left(2\pi 2^n \left|x - \frac{1}{2}\right|\right) - \frac{1}{2} \sin\left(4\pi 2^n \left|x - \frac{1}{2}\right|\right). \end{aligned}$$

Da (siehe [67, S.186])

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n'(x) &= \begin{cases} 2\pi 2^n [\cos(2\pi 2^n x) - \cos(4\pi 2^n x)] & \text{für } x > 1/2 \\ -2\pi 2^n [\cos(2\pi 2^n x) - \cos(4\pi 2^n x)] & \text{für } x < 1/2 \\ 0 & \text{für } x = 1/2 \end{cases} \\ \tilde{f}_n''(x) &= \begin{cases} -4\pi^2 2^{2n} [\sin(2\pi 2^n x) - 2 \sin(4\pi 2^n x)] & \text{für } x > 1/2 \\ 4\pi^2 2^{2n} [\sin(2\pi 2^n x) - 2 \sin(4\pi 2^n x)] & \text{für } x < 1/2 \\ 0 & \text{für } x = 1/2, \end{cases} \end{aligned}$$

ist $\tilde{g}_n \in C^2(\mathbb{R}^2)$, und es existiert eine von n unabhängige Konstante C mit

$$\|\tilde{g}_n\|_{j, \mathbb{R}^2} \leq C 2^{jn} \quad j = 0, 1, 2. \quad (4.106)$$

Ab jetzt betrachten wir statt $h = 1/n$ nur noch die Teilfolge $h = 2^{-n}$ (vgl. (3.18)). So gehört $(1/2, 1/2)$ zu Ω_h und $\tilde{g}_n \equiv 0$ auf $\bar{\Omega}_h$, da $\tilde{f}_n(jh) = 0$, $j \in \mathbb{N}_0$. Außerdem ist damit auch $\tilde{g}_n|_{\partial(0,1)^2} \equiv 0$, also $\tilde{g}_n \in C_0[0, 1]^2 \cap C^2[0, 1]^2$. Die Funktion \tilde{f}_n ist $h = 2^{-n}$ -periodisch sowohl auf $(-\infty, 1/2]$, also auch auf $[1/2, \infty)$, d.h., ist $x, x + jh \in (-\infty, 1/2]$ oder $x, x + jh \in [1/2, \infty)$, $j \in \mathbb{Z}$, so ist $\tilde{f}_n(x) = \tilde{f}_n(x + jh)$. Diese Periodizität vererbt sich natürlich auch auf \tilde{g}_n : Mit $I_1 := (-\infty, 1/2] \times [1/2, \infty)$, $I_2 := [1/2, \infty) \times [1/2, \infty)$, $I_3 := (-\infty, 1/2] \times (-\infty, 1/2]$ und $I_4 := [1/2, \infty) \times (-\infty, 1/2]$ gilt ($1 \leq j \leq 4$, $i, k \in \mathbb{Z}$):

$$\tilde{g}_n(x) = \tilde{g}_n(x + (ih, kh)), \quad x, x + (ih, kh) \in I_j. \quad (4.107)$$

Die Folge $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist gerade so konstruiert, daß für $\xi \in \Omega_h$ gilt (siehe [67, S.187]):

$$\tilde{a}(\tilde{g}_n, \varphi_{h,\xi}) = a(\tilde{g}_n, \varphi_{h,\xi}) = \begin{cases} 5 & \text{für } \xi = (1/2, 1/2) \\ 0 & \text{für } \xi \neq (1/2, 1/2). \end{cases} \quad (4.108)$$

Der Punkt $(1/2, 1/2)$ ist also ausgezeichnet. Um ein entsprechendes Verhalten für jedes $\eta \in \Omega_h$ zu erhalten, benutzen wir eine Transformation vom Punkt η auf $(1/2, 1/2)$. Dazu setzen wir

$$\tilde{g}_{n,\eta}(x) := \tilde{g}_n \left(x + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - \eta \right).$$

Man beachte, daß entsprechend zu \tilde{g}_n auch die Funktionen $\tilde{g}_{n,\eta}$ zu $C_0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\overline{\Omega})$ gehören und auf $\overline{\Omega}_h$ verschwinden. Damit gilt parallel zu (4.108) für $\eta, \xi \in \Omega_h$:

$$\tilde{a}(\tilde{g}_{n,\eta}, \varphi_{h,\xi}) = a(\tilde{g}_{n,\eta}, \varphi_{h,\xi}) = \begin{cases} 5 & \text{für } \xi = \eta \\ 0 & \text{für } \xi \neq \eta. \end{cases} \quad (4.109)$$

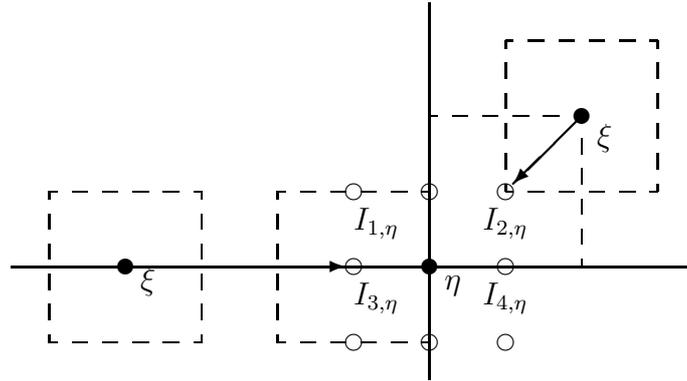
Beweis zu (4.109) Für $\xi = \eta$ ist

$$\begin{aligned} a(\tilde{g}_{n,\eta}, \varphi_{h,\xi}) &= \int_{\text{Tr } \varphi_{h,\eta}} \nabla \tilde{g}_n \left(x + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - \eta \right) \nabla \varphi_{h,\eta}(x) dx \\ &\stackrel{(4.105)}{=} \int_{\text{Tr } \varphi_{h,\eta}} \nabla \tilde{g}_n \left(x + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - \eta \right) \nabla \varphi_{h,(1/2,1/2)} \left(x + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - \eta \right) dx \\ &= \int_{\{x: x=y+(1/2,1/2)-\eta, y \in \text{Tr } \varphi_{h,\eta}\}} \nabla \tilde{g}_n(x) \nabla \varphi_{h,(1/2,1/2)}(x) dx \\ &\stackrel{(4.105)}{=} \int_{\text{Tr } \varphi_{h,(1/2,1/2)}} \nabla \tilde{g}_n(x) \nabla \varphi_{h,(1/2,1/2)}(x) dx \\ &= a(\tilde{g}_n, \varphi_{h,(1/2,1/2)}) \stackrel{(4.108)}{=} 5. \end{aligned}$$

Ist $n = 1$, also $h = 1/2$, so ist $\Omega_h = \{(1/2, 1/2)\}$ und $\xi = \eta$ der einzig mögliche Fall. Ist $n > 1$ und $\xi \neq \eta$, so beweisen wir (4.109) ebenfalls durch Reduktion auf (4.108). Allerdings müssen wir bei der Transformation von η auf den Punkt $(1/2, 1/2)$ beachten, daß ξ auf den Punkt $\xi + (1/2, 1/2) - \eta$ abgebildet wird, der aber evtl. nicht in Ω_h liegt. Damit gibt es keine zugehörige Basisfunktion, und wir können (4.108) nicht direkt benutzen. Um dieses allerdings nur rein formale Problem zu umgehen, ersetzen wir zunächst unter Ausnutzung der Periodizität von $\tilde{g}_{n,\eta}$ die Funktion $\varphi_{h,\xi}$ durch eine Basisfunktion $\varphi_{h,\zeta}$ zu einem ζ , das bei der Transformation in Ω_h bleibt. Dazu setzen wir jetzt $\mathbb{S}(\eta) := \{(\eta_1 \pm h, \eta_2), (\eta_1, \eta_2 \pm h), (\eta_1 - h, \eta_2 \pm h), (\eta_1 + h, \eta_2 \pm h)\}$. Damit existiert zu ξ ein $\zeta \in \mathbb{S}(\eta) \cap \Omega_h$, so daß für alle $x \in [\xi_1 - h, \xi_1 + h] \times [\xi_2 - h, \xi_2 + h]$ gilt:

$$\tilde{g}_{n,\eta}(x) = \tilde{g}_{n,\eta}(x + \zeta - \xi). \quad (4.110)$$

Denn (4.107) gilt auch für $\tilde{g}_{n,\eta}$ statt \tilde{g}_n , wenn wir I_j ersetzen durch $I_{1,\eta} = (-\infty, \eta_1] \times [\eta_2, \infty)$, $I_{2,\eta} = [\eta_1, \infty) \times [\eta_2, \infty)$, $I_{3,\eta} = (-\infty, \eta_1] \times (-\infty, \eta_2]$ und $I_{4,\eta} = [\eta_1, \infty) \times (-\infty, \eta_2]$. Damit läßt sich $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ aber wie folgt wählen (vgl. Abbildung 4.5, alle

Abbildung 4.5: Transformation von $\varphi_{h,\xi}$ zu $\varphi_{h,\zeta}$

Punkte aus $[\xi_1 - h, \xi_1 + h] \times [\xi_2 - h, \xi_2 + h]$ bleiben bei den eingezeichneten Verschiebungen im jeweiligen Quadranten):

$$\zeta_1 = \begin{cases} \eta_1 + h & \text{falls } \xi_1 > \eta_1 \\ \eta_1 - h & \text{falls } \xi_1 < \eta_1 \\ \eta_1 & \text{falls } \xi_1 = \eta_1, \end{cases} \quad \zeta_2 = \begin{cases} \eta_2 + h & \text{falls } \xi_2 > \eta_2 \\ \eta_2 - h & \text{falls } \xi_2 < \eta_2 \\ \eta_2 & \text{falls } \xi_2 = \eta_2. \end{cases}$$

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} a(\tilde{g}_{n,\eta}, \varphi_{h,\xi}) &= \int_{\text{Tr } \varphi_{h,\xi}} \nabla \tilde{g}_{n,\eta}(x) \nabla \varphi_{h,\xi}(x) dx \\ &\stackrel{(4.105)}{=} \int_{\text{Tr } \varphi_{h,\xi}} \nabla \tilde{g}_{n,\eta}(x) \nabla \varphi_{h,\zeta}(x + \zeta - \xi) dx. \end{aligned}$$

Da $\text{Tr } \varphi_{h,\xi} \subset [\xi_1 - h, \xi_1 + h] \times [\xi_2 - h, \xi_2 + h]$ (vgl. (3.32)) folgt weiter mit (4.110):

$$\begin{aligned} a(\tilde{g}_{n,\eta}, \varphi_{h,\xi}) &= \int_{\text{Tr } \varphi_{h,\xi}} \nabla \tilde{g}_{n,\eta}(x + \zeta - \xi) \nabla \varphi_{h,\zeta}(x + \zeta - \xi) dx \\ &\stackrel{(4.105)}{=} \int_{\text{Tr } \varphi_{h,\zeta}} \nabla \tilde{g}_{n,\eta}(x) \nabla \varphi_{h,\zeta}(x) dx = a(\tilde{g}_{n,\eta}, \varphi_{h,\zeta}). \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu $\xi + (1/2, 1/2) - \eta$ ist nun sicher, daß $\zeta + (1/2, 1/2) - \eta \in \Omega_h$ ist. Denn nach Konstruktion ist $\zeta + (1/2, 1/2) - \eta \in \mathbb{S}(1/2, 1/2)$ und da $n > 1$, ist $\mathbb{S}(1/2, 1/2) \subset \Omega_h$. Wir können also wie im Fall $\eta = \xi$ vorgehen und erhalten:

$$\begin{aligned} a(\tilde{g}_{n,\eta}, \varphi_{h,\xi}) &= a(\tilde{g}_{n,\eta}, \varphi_{h,\zeta}) \\ &\stackrel{(4.105)}{=} \int_{\text{Tr } \varphi_{h,\zeta}} \nabla \tilde{g}_n \left(x + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - \eta \right) \nabla \varphi_{h,\zeta + (1/2, 1/2) - \eta} \left(x + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - \eta \right) dx \\ &= a(\tilde{g}_n, \varphi_{h,\zeta + (1/2, 1/2) - \eta}). \end{aligned}$$

Da $\zeta \in \mathbb{S}(\eta)$, ist $\zeta \neq \eta$ und $\zeta + (1/2, 1/2) - \eta \neq (1/2, 1/2)$, so daß mit (4.108) wie gewünscht $a(\tilde{g}_{n,\eta}, \varphi_{h,\xi}) = 0$ folgt. \blacksquare

Wir haben jetzt alle Vorbereitungen getroffen und können mit dem eigentlichen Beweis der Aussage beginnen:

Beweis zu Satz 4.25 Wir benutzen Satz 2.31 mit den Setzungen ($n \in \mathbb{N}$, $h = 2^{-n}$, $s \in \{0, 1\}$ wie in der Formulierung des Satzes 4.25):

$$X = C_0(\overline{\Omega}) \cap C^s(\overline{\Omega}), \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{s,\overline{\Omega}}, \quad \varphi_n = \frac{1}{2^{(2-s)n}} = h^{2-s}, \quad \sigma(\delta) = \delta^{2-s},$$

$$S_\delta u = \omega_{2-s}^{(s)}(\delta, u, C(\overline{\Omega})), \quad \mathbb{B}_n := \left\{ \left(\frac{i}{2^n}, \frac{j}{2^n} \right) : 1 \leq i, j \leq 2^n - 1 \right\},$$

$$T_{n,\nu} u = \frac{|(u - u_h)(\nu)|}{2^{-sn} \log 2^n} = \frac{|(u - u_h)(\nu)|}{h^s |\log h|}, \quad \nu \in \mathbb{B}_n.$$

Wir beobachten zunächst, daß

$$\mathbb{B}_n = \Omega_h \subset \mathbb{B}_{n+1} \subset \mathbb{B}_{n+2} \dots \subset \mathbb{B} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{B}_j.$$

Damit gilt natürlich auch für jede (streng monoton wachsende) Teilfolge $(n_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$: $\limsup_{j \rightarrow \infty} \mathbb{B}_{n_j} = \mathbb{B}$. Die Funktionale $T_{n,\nu}$ sind beschränkt, da

$$T_{n,\nu} u \leq \frac{\|u - u_h\|_{C(\overline{\Omega})}}{h^s |\log h|} \stackrel{(3.91)}{\leq} C \frac{\inf_{v \in V_h(1)} \|u - v\|_{C(\overline{\Omega})}}{h^s} \leq Ch^{-s} \|u\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C2^{ns} \|u\|_{s,\overline{\Omega}}.$$

Insbesondere ist damit auch bereits die Bedingung (2.34) gezeigt. Für die Resonanzfolge setzen wir ($n \in \mathbb{N}$):

$$g_n(x) = 2^{-sn} \sum_{\eta \in \mathbb{B}_n} b_\eta \tilde{g}_{n,\eta}(x) = h^s \sum_{\eta \in \mathbb{B}_n} b_\eta \tilde{g}_{n,\eta}(x).$$

Dabei ist $(b_\eta)_{\eta \in \mathbb{B}}$ eine beliebige, konvergente Folge echt positiver Konvergenzfaktoren mit $b := \sum_{\eta \in \mathbb{B}} b_\eta$. Wegen der Positivität der Folge ist die Reihenfolge der Summation über die abzählbare Menge \mathbb{B} unwichtig. Mit den einzelnen Summanden $\tilde{g}_{n,\eta}$ ist auch $g_n \in C_0(\overline{\Omega}) \cap C^s(\overline{\Omega})$ und $g_n \equiv 0$ auf Ω_h . Die Summe in der Definition von g_n ist endlich, so daß wir für ihre Existenz keine Konvergenzfaktoren benötigen. Diese sind aber für die gleichgradige Beschränktheit der Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erforderlich.

zu (2.32):

$$\begin{aligned} \|g_n\|_{s,\overline{\Omega}} &\leq 2^{-sn} \sum_{\eta \in \mathbb{B}_n} b_\eta \|\tilde{g}_{n,\eta}\|_{s,\overline{\Omega}} \leq 2^{-sn} \|\tilde{g}_n\|_{s,\mathbb{R}^2} \sum_{\eta \in \mathbb{B}} b_\eta \\ &= b 2^{-sn} \|\tilde{g}_n\|_{s,\mathbb{R}^2} \stackrel{(4.106)}{\leq} C < \infty. \end{aligned}$$

zu (2.33):

$$\begin{aligned} &\omega_{2-s}^{(s)}(\delta, g_n, C(\overline{\Omega})) \\ &\leq 2^{-sn} \sum_{\eta \in \mathbb{B}_n} b_\eta \omega_{2-s}^{(s)}(\delta, \tilde{g}_{n,\eta}, C(\overline{\Omega})) \leq b 2^{-sn} \max_{\eta \in \mathbb{B}_n} \omega_{2-s}^{(s)}(\delta, \tilde{g}_{n,\eta}, C(\overline{\Omega})) \\ &\leq b 2^{-sn} \omega_{2-s}^{(s)}(\delta, \tilde{g}_n, C(\mathbb{R}^2)) \leq \begin{cases} C 2^{-sn} |\tilde{g}_n|_{s,\mathbb{R}^2} \stackrel{(4.106)}{=} \mathcal{O}(1) \\ C_1 2^{-sn} \delta^{2-s} |\tilde{g}_n|_{2,\mathbb{R}^2} \stackrel{(4.106)}{\leq} C_2 \delta^{2-s} 2^{(2-s)n} \\ = C_2 \sigma(\delta) / \varphi_n. \end{cases} \end{aligned}$$

zu (2.35): Es genügt, (2.39) zu überprüfen.

$$T_{n,\nu}u \leq \frac{\|u - u_h\|_{C(\bar{\Omega})}}{2^{-sn} \log 2^n} \stackrel{(3.99)}{\leq} C\omega_{2^{-s}}(2^{-n}, u, C(\bar{\Omega})) = CS_{\sigma^{-1}(\varphi_n)}u.$$

zu (2.36): Wir zeigen die Resonanzbedingung mit den Ergebnissen, die bereits für die diskrete Green-Funktion bewiesen wurden. Zunächst ist für $\xi \in \Omega_h$:

$$\tilde{a}(g_n, \varphi_{h,\xi}) = 2^{-sn} \sum_{\eta \in \mathbb{B}_n} b_\eta \tilde{a}(\tilde{g}_{n,\eta}, \varphi_{h,\xi}) \stackrel{(4.109)}{=} 5b_\xi 2^{-sn}.$$

Wegen (3.89) ist dann aber auch $a((g_n)_h, \varphi_{h,\xi}) = 5b_\xi 2^{-sn}$ für alle $\xi \in \Omega_h$. Mit (4.104) haben wir damit

$$h^2 \Delta_h (g_n)_h(\xi) = -a((g_n)_h, \varphi_{h,\xi}) = -5b_\xi 2^{-sn} = -5b_\xi h^s \quad \forall \xi \in \Omega_h,$$

so daß wir für die Restriktion $(g_n)_h|_{\bar{\Omega}_h} \in V_h^\#$ mit (4.93) die Darstellung

$$(g_n)_h(\xi) = -h^{s-2} \sum_{\eta \in \Omega_h} 5b_\eta G_h(\xi, \eta) = -2^{(2-s)n} \sum_{\eta \in \Omega_h} 5b_\eta G_h(\xi, \eta)$$

erhalten. Da außerdem $g_n = 0$ auf $\Omega_h = \mathbb{B}_n$, gilt schließlich für den Fehler an jeder Stelle $\xi \in \mathbb{B}_n$:

$$\begin{aligned} T_{n,\xi} g_n &= \frac{|(g_n - (g_n)_h)(\xi)|}{2^{-sn} \log 2^n} = \frac{|(g_n)_h(\xi)|}{2^{-sn} \log 2^n} = \left| \frac{2^{2n}}{\log 2^n} \sum_{\eta \in \Omega_h} 5b_\eta G_h(\xi, \eta) \right| \\ &\stackrel{(4.92)}{\geq} -5 \frac{2^{2n}}{\log 2^n} b_\xi G_h(\xi, \xi) = -5b_\xi \frac{G_h(\xi, \xi)}{h^2 |\log h|} \stackrel{(4.101)}{\geq} 5cb_\xi > 0. \end{aligned}$$

Dabei wird hier ganz entscheidend die Negativität der diskreten Green-Funktionen (vgl. (4.92)) ausgenutzt. ■

Es stellt sich die Frage, ob die Aussage von Satz 4.25 noch verbesserbar ist. Zunächst ist klar, daß wir mit der hier benutzten Methode die Menge \mathbb{B} nicht durch $(0, 1)^2$ ersetzen können. Man könnte aber die Idee haben, die Abhängigkeit der σ -Aussage vom Punkt $\eta \in \mathbb{B}$ zu entkoppeln. Gilt also in Verschärfung zu Satz 4.25 sogar z.B. die folgende Aussage?

Sei $0 < \varepsilon < 1/2$. Zu jedem abstrakten Stetigkeitsmodul ω mit $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(\delta)/\delta = \infty$ existiert ein Gegenbeispiel $u_\omega \in C_0(\bar{\Omega}) \cap C^1(\bar{\Omega})$, so daß

$$\omega_1^{(1)}(\delta, u_\omega, C(\bar{\Omega})) = \mathcal{O}(\omega(\delta)) \tag{4.111}$$

und

$$\frac{|(u_\omega - (u_\omega)_h)(\eta)|}{h |\log h| \omega(h)} \geq c > 0 \quad \forall \eta \in \Omega_h \cap [\varepsilon, 1 - \varepsilon]^2, k \in \mathbb{N}, \tag{4.112}$$

für eine (gemeinsame) Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ und $h = 1/n_k$.

Das heißt, die Konstante c und die Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sind jetzt im Gegensatz zu Satz 4.25 von η unabhängig. Die Einschränkung auf $[\varepsilon, 1 - \varepsilon]^2$ ist naheliegend, um Probleme mit der Randbedingung $(u_\omega - (u_\omega)_h)|_{\partial\Omega} \equiv 0$ zu vermeiden.

Dennoch ist die vermeintliche Verbesserung falsch. Wir zeigen, daß es zu keinem abstrakten Stetigkeitsmodul ω eine Funktion $u_\omega \in C_0(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit (4.111) und (4.112) gibt. Dazu nehmen wir an, u_ω existiere, und wir führen dies zum Widerspruch. Zunächst gilt für $\eta \in \Omega_h \cap [\varepsilon, 1 - \varepsilon]^2$

$$|u_\omega - (u_\omega)_h|(\eta) \leq \|u_\omega - \Pi_{h,1}u_\omega\|_{C(\overline{\Omega})} + |\Pi_{h,1}u_\omega - (u_\omega)_h|(\eta) \quad (4.113)$$

und nach (3.97) und Satz 2.19:

$$\begin{aligned} \|u_\omega - \Pi_{h,1}u_\omega\|_{C(\overline{\Omega})} &\leq C_1\omega_2(h, u_\omega, C(\overline{\Omega})) \leq C_2h\omega_1^{(1)}(h, u_\omega, C(\overline{\Omega})) \\ &\stackrel{(4.111)}{=} \mathcal{O}(h\omega(h)). \end{aligned} \quad (4.114)$$

Daraus folgt zusammen mit (4.112)

$$\begin{aligned} |\Pi_{h,1}u_\omega - (u_\omega)_h|(\eta) &\stackrel{(4.113)}{\geq} |u_\omega - (u_\omega)_h|(\eta) - \|u_\omega - \Pi_{h,1}u_\omega\|_{C(\overline{\Omega})} \\ &\stackrel{(4.112), (4.114)}{\geq} ch|\log h|\omega(h) - Ch\omega(h) \\ &= (c|\log h| - C)h\omega(h) > 0, \end{aligned} \quad (4.115)$$

falls h hinreichend klein ist. Damit haben wir einerseits, da $\Pi_{h,1}u_\omega - (u_\omega)_h \in V_h$:

$$\begin{aligned} &\|\Pi_{h,1}u_\omega - (u_\omega)_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\stackrel{(3.45)}{\geq} c_1 \left[h^2 \sum_{\eta \in \Omega_h} [\Pi_{h,1}u_\omega(\eta) - (u_\omega)_h(\eta)]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{(4.115)}{\geq} c_1 \left[h^2 \sum_{\eta \in \Omega_h \cap [\varepsilon, 1 - \varepsilon]^2} [(c|\log h| - C)h\omega(h)]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\geq c_2(c|\log h| - C)h\omega(h) \neq \mathcal{O}(h\omega(h)) \quad (h = n_k^{-1} \rightarrow 0+). \end{aligned} \quad (4.116)$$

Andererseits ist aber

$$\begin{aligned} \|\Pi_{h,1}u_\omega - (u_\omega)_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_\omega - \Pi_{h,1}u_\omega\|_{C(\overline{\Omega})} + \|u_\omega - (u_\omega)_h\|_{L^2(\Omega)} \\ &\stackrel{(4.114), (3.90)}{\leq} C_1h\omega(h) + \|u_\omega - P_hu_\omega\|_{L^2(\Omega)} \\ &\stackrel{(3.79)}{\leq} C_1h\omega(h) + C_2h\|u_\omega - P_hu_\omega\|_{1,2,\Omega} \\ &\stackrel{(2.58)}{\leq} C_1h\omega(h) + C_3h \inf_{v \in V_h} \|u_\omega - v\|_{1,2,\Omega} \\ &\leq C_1h\omega(h) + C_3h\|u_\omega - \Pi_{h,1}u_\omega\|_{1,\infty,\Omega} \\ &\stackrel{(3.98), \text{Satz 2.19}}{\leq} C_1h\omega(h) + C_4h\omega_1^{(1)}(h, u, C(\overline{\Omega})) \stackrel{(4.111)}{=} \mathcal{O}(h\omega(h)) \end{aligned}$$

im Widerspruch zu (4.116). ■

Mit den Resonanzprinzipien können wir im Fall $\omega(\delta) = \delta$ nur ein Gegenbeispiel im Sinne von Satz 2.32 angeben oder auf die von Haverkamp bewiesene asymptotische Schärfe verweisen. Betrachtet man die Poisson-Gleichung auf einer Kreisscheibe, so läßt sich die Differentialgleichung in eine singuläre gewöhnliche Randwertaufgabe überführen, die ihrerseits mit einem Finite-Elemente-Schema näherungsweise gelöst werden kann. Fried gibt dazu in [47] explizit ein unendlich-oft differenzierbares Gegenbeispiel an, bei dem die Approximationsordnung $|\log h|h^2$ genau angenommen wird. In unserer jetzigen Situation dürfte ein Gegenbeispiel aber nicht so glatt sein, denn im Vergleich mit dem Differenzenverfahren zum Fünf-Punkte-Differenzenoperator (4.88) beweisen wir:

Satz 4.31 (vgl. (3.99)) *Seien $\Omega = (0, 1)^2$ und $V_h = V_h(1)$ Ansatzfunktionenräume, gebildet durch 2-Simplexe vom Grad 1 zu den Triangulierungen (3.17). Weiter sei $u \in C_0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\overline{\Omega})$ und u_h die zugehörige Lösung von (3.89) für $r = 1$. Für $h = 1/n$ gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|u - u_h\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C \left[\omega_2 \left(h, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, C(\overline{\Omega}) \right) + \omega_2 \left(h, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, C(\overline{\Omega}) \right) + h^2 |u|_{2, \overline{\Omega}} \right], \quad (4.117)$$

wobei die Konstante C von u und h unabhängig ist. Insbesondere gilt also für Funktionen $u \in C_0(\overline{\Omega}) \cap C^4(\overline{\Omega})$, daß $\|u - u_h\|_{C(\overline{\Omega})} = \mathcal{O}(h^2)$. Der log-Faktor tritt hier nicht mehr auf.

Beweis Zu $\eta = (jh, lh) \in \Omega_h$ ist $\varphi_{h,\eta}$ die in (3.33) angegebene und skizzierte Basisfunktion. Wir rechnen zunächst nach, daß

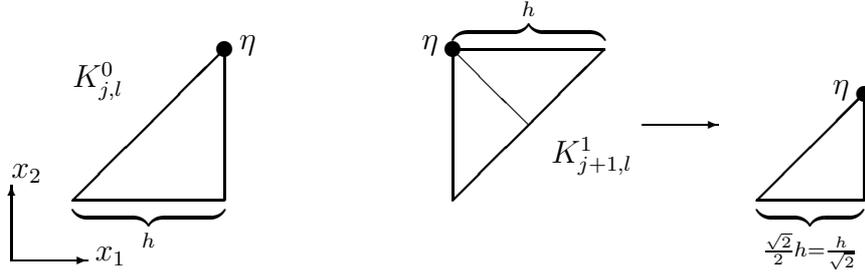
$$\int_{\Omega} \varphi_{h,\eta}(x) dx = h^2. \quad (4.118)$$

$\int_{\Omega} \varphi_{h,\eta}(x) dx$ ist die Summe der Volumina von sechs 3-Simplexen über den Dreiecken des Trägers (siehe (3.32)). Offensichtlich haben die 3-Simplexe zu $K_{j,l}^0$, $K_{j,l}^1$, $K_{j+1,l+1}^0$ und $K_{j+1,l+1}^1$ das gleiche Volumen (vgl. Abbildung 4.6, beachte $\varphi_{h,\eta}(\eta) = 1$ und $\varphi_{h,\eta}(\xi) = 0$ für die weiteren Ecken ξ des jeweiligen Dreiecks):

$$\int_{K_{j,l}^0} \varphi_{h,\eta}(x) dx = \int_0^h \int_0^{x_1} \frac{1}{h} x_2 dx_2 dx_1 = \int_0^h \frac{1}{2h} x_1^2 dx_1 = \frac{1}{6} h^2.$$

Ebenso haben die 3-Simplexe zu $K_{j+1,l}^1$ und $K_{j,l+1}^0$ das gleiche Volumen, und es ist ebenfalls

$$\begin{aligned} \int_{K_{j+1,l}^1} \varphi_{h,\eta}(x) dx &= 2 \int_0^{\sqrt{2}h/2} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{2}}{h} x_2 dx_2 dx_1 = 2 \int_0^{h/\sqrt{2}} \frac{x_1^2}{\sqrt{2}h} dx_1 \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{2}h} \left(\frac{h}{\sqrt{2}} \right)^3 = \frac{h^2}{6}. \end{aligned}$$

Abbildung 4.6: Integrationsbereiche in $\text{Tr } \varphi_{h,\eta}$

Insgesamt ergibt sich daraus (4.118). Damit zeigen wir für $f \in C(\overline{\Omega})$ und $\eta \in \Omega_h$ die folgende Abschätzung, die den Unterschied der Inhomogenitäten des Finite-Elemente-Ansatzes und eines über Δ_h gebildeten Differenzenschemas wiedergibt:

$$\left| h^2 f(\eta) - \int_{\Omega} \varphi_{h,\eta}(x) f(x) dx \right| \leq \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{2} h^2 \omega_2(h, f, C(\overline{\Omega})). \quad (4.119)$$

Wir führen eine Transformation in Polarkoordinaten durch. Dazu sei $\varphi_{h,\eta}$ von $\overline{\Omega}$ auf \mathbb{R}^2 durch 0 fortgesetzt und f außerhalb von $\overline{\Omega}$ beliebig definiert. Wir benutzen, daß $\text{Tr } \varphi_{h,\eta} \subset S(\sqrt{2}h, \eta)$ (siehe (3.30), vgl. (3.32) und Abbildung 3.2), und erhalten

$$\begin{aligned} & \left| h^2 f(\eta) - \int_{\Omega} \varphi_{h,\eta}(x) f(x) dx \right| \stackrel{(4.118)}{=} \left| \int_{\Omega} \varphi_{h,\eta}(x) [f(\eta) - f(x)] dx \right| \\ &= \left| \int_{S(\sqrt{2}h, \eta)} \varphi_{h,\eta}(x) [f(\eta) - f(x)] dx \right| \\ &= \left| \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}h} t \varphi_{h,\eta}(\eta + (t \cos \rho, t \sin \rho)) [f(\eta) - f(\eta + (t \cos \rho, t \sin \rho))] dt d\rho \right| \\ &= \left| \int_0^{\pi} \int_0^{\sqrt{2}h} t \varphi_{h,\eta}(\eta + (t \cos \rho, t \sin \rho)) [2f(\eta) - f(\eta + (t \cos \rho, t \sin \rho)) \right. \\ &\quad \left. - f(\eta - (t \cos \rho, t \sin \rho))] dt d\rho \right|, \end{aligned}$$

denn da die Dreiecke des Trägers bei einer 180-Grad-Drehung um den Punkt η wieder ineinander übergehen, gilt für die Funktion $\varphi_{h,\eta}$:

$$\varphi_{h,\eta}(\eta + (t \cos \rho, t \sin \rho)) = \varphi_{h,\eta}(\eta - (t \cos \rho, t \sin \rho)).$$

Man beachte außerdem, daß Funktionswerte von f zu Argumenten außerhalb von $\overline{\Omega}$ keine Rolle spielen, da für sie $\varphi_{h,\eta}$ verschwindet. Wegen $\varphi_{h,\eta} \geq 0$ erhalten wir weiter:

$$\begin{aligned}
& \left| h^2 f(\eta) - \int_{\Omega} \varphi_{h,\eta}(x) f(x) dx \right| \\
& \leq \omega_2(\sqrt{2}h, f, C(\bar{\Omega})) \int_0^\pi \int_0^{\sqrt{2}h} t \varphi_{h,\eta}(\eta + (t \cos \rho, t \sin \rho)) dt d\rho \\
& = \omega_2(\sqrt{2}h, f, C(\bar{\Omega})) \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi_{h,\eta}(x) dx \stackrel{(4.118)}{=} \frac{h^2}{2} \omega_2(\sqrt{2}h, f, C(\bar{\Omega})) \\
& \leq \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{2} h^2 \omega_2(h, f, C(\bar{\Omega})).
\end{aligned}$$

Aus dem Maximumprinzip Lemma 4.26 folgt die Stabilitätsungleichung für den Fünf-Punkte-Differenzenoperator (siehe [57, S.467]): Ist $y_h \in V_h^\sharp$, so gilt

$$\max_{\xi \in \Omega_h} |y_h(\xi)| \leq \frac{1}{2} \max_{\xi \in \Omega_h} |\Delta_h y_h(\xi)|. \quad (4.120)$$

Außerdem erhält man mittels Taylor-Entwicklung für den sogenannten Abbruchfehler (siehe [12]):

$$\begin{aligned}
\max_{\xi \in \Omega_h} |(\Delta_h u - \Delta u)(\xi)| & \leq \frac{1}{2} \left[\bar{\omega}_{(2,0)} \left(h, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, C(\bar{\Omega}) \right) + \bar{\omega}_{(0,2)} \left(h, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, C(\bar{\Omega}) \right) \right] \\
& \quad \forall u \in C_0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\bar{\Omega}). \quad (4.121)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_{C(\bar{\Omega})} & \leq \|u - \Pi_{h,1}u\|_{C(\bar{\Omega})} + \|\Pi_{h,1}u - u_h\|_{C(\bar{\Omega})} \\
& \stackrel{(3.62)}{\leq} C_1 h^2 |u|_{2,\bar{\Omega}} + \underbrace{\|\Pi_{h,1}u - u_h\|_{C(\bar{\Omega})}}_{\in V_h}. \quad (4.122)
\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
\|\Pi_{h,1}u - u_h\|_{C(\bar{\Omega})} & \stackrel{(3.46)}{\leq} C_2 \max_{\eta \in \Omega_h} |(\Pi_{h,1}u - u_h)(\eta)| \\
& = C_2 \max_{\eta \in \Omega_h} |(u - u_h)(\eta)| \stackrel{(4.120)}{\leq} \frac{C_2}{2} \max_{\eta \in \Omega_h} |\Delta_h(u - u_h)(\eta)| \\
& \stackrel{(4.104)}{\leq} \frac{C_2}{2} \max_{\eta \in \Omega_h} |\Delta_h u(\eta) + h^{-2} a(u_h, \varphi_{h,\eta})| \stackrel{(3.89)}{=} \stackrel{(3.90)}{=} \frac{C_2}{2} \max_{\eta \in \Omega_h} |\Delta_h u(\eta) + h^{-2} a(u, \varphi_{h,\eta})| \\
& \stackrel{(3.87),(2.7)}{=} \frac{C_2}{2} \max_{\eta \in \Omega_h} \left| \Delta_h u(\eta) - h^{-2} \int_{\Omega} \Delta u(x) \varphi_{h,\eta}(x) dx \right| \\
& \leq \frac{C_2}{2} \left[\max_{\eta \in \Omega_h} |\Delta_h u(\eta) - \Delta u(\eta)| + \max_{\eta \in \Omega_h} \left| \Delta u(\eta) - h^{-2} \int_{\Omega} \Delta u(x) \varphi_{h,\eta}(x) dx \right| \right] \\
& \stackrel{(4.119)}{f=\Delta u} \leq \frac{C_2}{2} \left[\max_{\eta \in \Omega_h} |\Delta_h u(\eta) - \Delta u(\eta)| + \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{2} \omega_2(h, \Delta u, C(\bar{\Omega})) \right] \\
& \stackrel{(4.121)}{\leq} \frac{C_2}{2} \left[\frac{1}{2} \bar{\omega}_{(2,0)} \left(h, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, C(\bar{\Omega}) \right) + \frac{1}{2} \bar{\omega}_{(0,2)} \left(h, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, C(\bar{\Omega}) \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\leq C_3 \left[\omega_2 \left(h, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, C(\bar{\Omega}) \right) + \omega_2 \left(h, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, C(\bar{\Omega}) \right) \right] + \frac{(1 + \sqrt{2})^2}{2} \omega_2(h, \Delta u, C(\bar{\Omega}))$$

Dies eingesetzt in (4.122) ergibt schließlich die Behauptung. ■

Zur Neun-Punkte-Mehrstellenformel und einem Sieben-Punkte-Differenzenstern sind ebenfalls ihnen entsprechende Finite-Elemente-Schemata mit in gewissem Sinne stückweise linearen Ansatzfunktionen bekannt. Hier kann für die Finite-Elemente-Approximation in den Punkten von Ω_h für glatte Lösungen u sogar $\mathcal{O}(h^4)$ -Konvergenz gezeigt werden (vgl. [50, S.242], [62], [64, S.96]). Dies ist gerade die Konvergenzordnung des Differenzenverfahrens. Da sich der Term $\|u - \Pi_{h,1}u\|_{C(\bar{\Omega})}$ in (4.122) aber nicht besser als durch $\mathcal{O}(h^2)$ abschätzen läßt, ist diese höhere Konvergenzordnung nicht global auf ganz $\bar{\Omega}$ zu erwarten. Die bessere Approximationsgeschwindigkeit auf Ω_h ist ein Superkonvergenz-Ergebnis. Im nächsten Kapitel werden wir uns Superkonvergenz-Abschätzungen in Verbindung mit gewöhnlichen Differentialgleichungen genauer ansehen.

Kapitel 5

Superkonvergenz

Wir haben bislang die Optimalität von solchen Fehlerschranken untersucht, bei denen der Fehler auf dem gesamten Gebiet Ω gemessen wird. Es gibt jedoch Ausnahmepunkte, in denen die Finite-Elemente-Approximation u_h schneller gegen die Lösung u einer Variationsaufgabe konvergiert, als das auf dem gesamten Gebiet möglich ist. Dieses Phänomen nennt man Superkonvergenz. Der Begriff wird aber noch weiter gefaßt und schließt auch Methoden ein, die z.B. die Näherungslösung durch zusätzliches Glätten weiter verbessern und damit zumindest auf Teilgebieten die Approximationsordnung erhöhen. Einen Überblick über das Gebiet der Superkonvergenz geben [63] und [94].

5.1 Superkonvergenz in den Knoten

Wir greifen uns exemplarisch ein Beispiel für Superkonvergenz in den Knoten der Zerlegung bei einer Sturm-Liouville-Randwertaufgabe heraus (siehe [36], [45, S.43ff] und [94, S.3] sowie die Darstellung in [49]): Ausgangspunkt für dieses und auch für das folgende Unterkapitel ist die gewöhnliche Differentialgleichung

$$-(a(x)u'(x))' + b(x)u(x) = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

mit der Randbedingung $u(0) = u(1) = 0$. Die schwache Formulierung dieser Aufgabe lautet demnach (vgl. Kapitel 3.1): Gesucht ist eine Funktion $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$, so daß

$$a(u, v) := \int_0^1 [a(x)u'(x)v'(x) + b(x)u(x)v(x)] dx = (f, v)_{L^2(0,1)} \quad \forall v \in W_0^{1,2}(0, 1). \quad (5.1)$$

Dabei sei jetzt $a(x)$ Lipschitz-stetig auf $[0, 1]$ und $b \in L^\infty(0, 1)$, $f \in L^2(0, 1)$. Damit ist die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ bezüglich $W_0^{1,2}(0, 1)$ beschränkt. Um sicherzustellen, daß $a(\cdot, \cdot)$ koerziv ist, sei außerdem $a(x) > \kappa > 0$ und $b(x) \geq 0$ (f.ü.). So besitzt (5.1) nach Satz 2.35 eine eindeutige Lösung. Für die Diskretisierung betrachten wir zu $n \in \mathbb{N}$, $h = 1/n$, die Folge der äquidistanten Zerlegungen (Triangulierungen) $\mathcal{T}_h = \{[jh, (j+1)h] : 0 \leq$

$j < n$ }. Die folgenden direkten Sätze gelten auch bei Verwendung gleichmäßig regulärer Triangulierungen (vgl. (3.13),(3.15)). Weiter sei dazu wieder $u_h \in V_h$ die eindeutige Lösung von

$$a(u_h, v) = (f, v)_{L^2(0,1)} \quad \forall v \in V_h = V_h(r), \quad (5.2)$$

wobei V_h wie in (3.19) für 1-Simplexe vom Grad r definiert ist, d.h.,

$$V_h(r) = \{v \in C_0[0, 1] : v|_{[jh, (j+1)h]} \in \mathcal{P}_r[jh, (j+1)h], 0 \leq j < n\}. \quad (5.3)$$

Anwendung von Satz 3.17a) führt zu der Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_{L^2(0,1)} \leq C \begin{cases} h^2 |u|_{2,2,(0,1)} & \text{für } r = 1 \\ h^2 \omega_{r-1}^{(2)}(h, u, L^2(0, 1)) = h^2 \omega_{r-1}(h, u'', L^2(0, 1)) & \text{für } r \geq 2. \end{cases}$$

Die Koeffizienten der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ erfüllen die Voraussetzungen des Regularitätssatzes 3.1, so daß $u \in W^{2,2}(0, 1)$ und damit der Stetigkeitsmodul auch jetzt wohldefiniert ist. Im Gegensatz zu Abschätzungen in der Supremum-Norm für $m = 2$ (vgl. Folgerung 3.28), wo zumindest im Fall linearer Ansatzfunktionen ein notwendiger (vgl. Satz 4.25) zusätzlicher log-Faktor auftritt, hat hier die eindimensionale Green-Funktion keine logarithmische Singularität (vgl. (5.9)), und die Fehlerschranke bleibt von einem log-Faktor frei. Sind zusätzlich $a(x), b(x) \in W^{1,2}(0, 1)$, so gilt:

$$\|u - u_h\|_{C[0,1]} \leq C [h \omega_r^{(1)}(h, u, C[0, 1]) + h^{r+1} \|u\|_{C[0,1]}], \quad (5.4)$$

wobei wegen $u \in W^{2,2}(0, 1)$ insbesondere $u \in C^1[0, 1]$ ist (vgl. (2.8)). Zum Beweis von (5.4) zitieren wir aus [96] (vgl. [45, S.38]) für $1 \leq j \leq r + 1$ die Stabilitäts- und Jackson-Typ-Ungleichung

$$\|u - P_h u\|_{C[0,1]} \leq Ch^j \|u\|_{j,[0,1]} \quad \forall u \in C_0[0, 1] \cap C^j[0, 1], \quad (5.5)$$

wobei die Ritz-Projektion $P_h \in [W_0^{1,2}(0, 1), V_h]$ über $a(P_h u, v) = a(u, v) \quad \forall v \in V_h$ definiert ist¹ (siehe (2.57)). Wir haben also (vgl. (2.16))

$$\|u - u_h\|_{C[0,1]} \leq ChK(h^r, u, (C_0[0, 1] \cap C^1[0, 1], \|\cdot\|_{1,[0,1]}), (C_0[0, 1] \cap C^{r+1}[0, 1], \|\cdot\|_{r+1,[0,1]})),$$

so daß (5.4) eine Konsequenz von Folgerung 2.21 ist.

Diese Abschätzungen lassen sich aber in den Zerlegungspunkten jh von \mathcal{T}_h für $r > 1$ und bei hinreichend glatten Koeffizienten $a(x)$ und $b(x)$ zur folgenden Superkonvergenzaussage verbessern:

Satz 5.1 *Seien $r > 1$ und $\kappa < a(x) \in W^{r,\infty}(0, 1)$. Außerdem sei $0 \leq b(x) \in C^{r-1}[0, 1]$. Ist u Lösung einer Aufgabe (5.1) und u_h die zugehörige von (5.2), so gilt ($h = 1/n$):*

$$|u(\nu) - u_h(\nu)| \leq Ch^{r+1} \omega_{r-1}^{(2)}(h, u, L^2(0, 1)) \quad \forall \nu = jh, 0 \leq j \leq n. \quad (5.6)$$

Dabei ist die Konstante C unabhängig von ν , u und h .

¹Wir benutzen hier die Notation $P_h u$ statt u_h , da $u \in C_0[0, 1] \cap C^1[0, 1]$ nicht unbedingt Lösung einer Aufgabe (5.1) mit Inhomogenität $f = f_u \in L^2(0, 1)$ ist.

²Insbesondere stimmt damit $a(x)$ f.ü. mit einer Lipschitz-stetigen Funktion überein, die wir mit $a(x)$ identifizieren, vgl. (2.8), (5.1).

In den Knoten ist die Konvergenzordnung also bis zum Faktor h^{r-1} größer. Dagegen haben wir bei der Diskussion des log-Faktors in Satz 4.25 gesehen, daß dort die Approximationsgeschwindigkeit in den Knoten der Triangulierung minimal ist, also genau das entgegengesetzte Verhalten zeigt. Während dies dort an den diskreten Green-Funktionen liegt, ist hier für das positive Ergebnis das Verhalten der (kontinuierlichen) Green-Funktion verantwortlich, was von Douglas und Dupont [35] gesehen wurde. Außerdem beachte man, daß in (5.6) ein punktwiser Fehler gegen einen L^2 -Modul, also ein Integralmittel, abgeschätzt wird. Es ist hier kein sup-Norm-Modul erforderlich.

Zum Beweis von Satz 5.1 zitieren wir aus [36] bzw. [45, S.45], daß ($\nu = jh$)

$$|u(\nu) - u_h(\nu)| \leq Ch^r \|u - u_h\|_{1,2,(0,1)}, \quad (5.7)$$

werden aber im folgenden diese Aussage im Spezialfall $b \equiv 0$ explizit zeigen (vgl. Lemma 5.4), da wir sie später bei den Schärfeüberlegungen benötigen. Der allgemeine Fall wird völlig analog bewiesen, allerdings sind die verwendeten Green-Funktionen (vgl. Lemma 5.2) entsprechend komplizierter. Mit (5.7) folgt (5.6) sofort aus Satz 3.17a), d.h. aus $\|u - u_h\|_{1,2,(0,1)} \leq Ch \omega_{r-1}^{(2)}(h, u, L^2(0, 1))$.

Lemma 5.2 (vgl. [73, S.265f]) *Seien $a(x) > \kappa$ Lipschitz-stetig und $b \equiv 0$. Die Funktion $G : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$G(x, y) := \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{a(t)} dt} \begin{cases} \int_0^x \frac{1}{a(t)} dt \int_y^1 \frac{1}{a(t)} dt & \text{für } 0 \leq x \leq y \\ \int_x^1 \frac{1}{a(t)} dt \int_0^y \frac{1}{a(t)} dt & \text{für } y < x \leq 1, \end{cases}$$

ist die **Green-Funktion** der Aufgabe (5.1), d.h., für jedes $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$ gilt:

$$a(u, G(\cdot, y)) = u(y) \quad \forall y \in [0, 1]. \quad (5.8)$$

Man beachte, daß $W_0^{1,2}(0, 1)$ nach (2.8) (vgl. Satz 2.9) in $C[0, 1]$ stetig eingebettet ist, so daß u punktweise erklärt ist.

Beweis Da $a(x) > \kappa > 0$, ist G wohldefiniert. Außerdem ist G bei festem y stetig (insbesondere in $x = y$) und auf $[0, y]$ und $[y, 1]$ stetig differenzierbar. Da außerdem $G(0, y) = G(1, y) = 0$, ist $G(\cdot, y) \in W_0^{1,2}(0, 1)$ für jedes $y \in [0, 1]$. Zum Beweis von (5.8) sei $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$. Damit ist

$$a(u, G(\cdot, y)) = \int_0^1 a(x)u'(x) \frac{\partial}{\partial x} G(x, y) dx = I_1 + I_2,$$

wobei

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{\int_y^1 \frac{1}{a(t)} dt}{\int_0^1 \frac{1}{a(t)} dt} \int_0^y a(x)u'(x) \frac{1}{a(x)} dt = \frac{\int_y^1 \frac{1}{a(t)} dt}{\int_0^1 \frac{1}{a(t)} dt} u(y), \\ I_2 &= \frac{\int_0^y \frac{1}{a(t)} dt}{\int_0^1 \frac{1}{a(t)} dt} \int_y^1 a(x)u'(x) \frac{-1}{a(x)} dt = \frac{\int_0^y \frac{1}{a(t)} dt}{\int_0^1 \frac{1}{a(t)} dt} u(y). \end{aligned}$$

Insgesamt ist also $I_1 + I_2 = u(y)$. Schließlich bemerken wir noch, daß $G(x, y)$ eindeutig bestimmt ist. Denn nach (2.8) bzw. Satz 2.9 ist das Funktional $f^*(u) := u(y)$ in $(W_0^{1,2}(0, 1))^*$. Damit hat aber die Aufgabe $a(u, \tilde{u}) = f^*(u) \quad \forall u \in W_0^{1,2}(0, 1)$ nach Satz 2.35 eine eindeutige Lösung $\tilde{u} = G(\cdot, y)$. ■

Wir benötigen eine Normabschätzung der Green-Funktion.

Lemma 5.3 *Sind $r > 1$ und $\kappa < a(x) \in W^{r,\infty}(0, 1)$, sowie $b \equiv 0$, so gilt für die Green-Funktion G aus Lemma 5.2*

$$G(\cdot, y) \in W^{r+1,2}(0, y) \cap W^{r+1,2}(y, 1)$$

und

$$|G(\cdot, y)|_{r+1,2,(0,y)}^2 + |G(\cdot, y)|_{r+1,2,(y,1)}^2 \leq Cy(1-y), \quad (5.9)$$

wobei die Konstante C von y unabhängig ist.

Beweis

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{r+1}}{\partial x^{r+1}} G(x, y) \right| &\leq \frac{\|\frac{1}{a}\|_{C[0,1]}}{\int_0^1 \frac{1}{a(t)} dt} \begin{cases} (1-y) \left| \left(\frac{1}{a(x)} \right)^{(r)} \right| & \text{für } 0 \leq x \leq y \\ y \left| \left(-\frac{1}{a(x)} \right)^{(r)} \right| & \text{für } y < x \leq 1 \end{cases} \\ &\leq C \begin{cases} 1-y & \text{für } 0 \leq x \leq y \\ y & \text{für } y < x \leq 1 \end{cases} \quad \text{f.ü.} \end{aligned}$$

Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned} |G(\cdot, y)|_{r+1,2,(0,y)}^2 + |G(\cdot, y)|_{r+1,2,(y,1)}^2 &\leq y|G(\cdot, y)|_{r+1,\infty,(0,y)}^2 + (1-y)|G(\cdot, y)|_{r+1,\infty,(y,1)}^2 \\ &\leq C(y(1-y)^2 + (1-y)y^2) = Cy(1-y). \end{aligned}$$

■

Lemma 5.4 *(vgl. Satz 5.1) Seien $r > 1$, $\kappa < a(x) \in W^{r,\infty}(0, 1)$ und $b(x) \equiv 0$. Weiter sei $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$. Dann gilt für den Fehler ($h = 1/n$):*

$$|u(\nu) - P_h u(\nu)| \leq Ch^r \sqrt{\nu(1-\nu)} \|u - P_h u\|_{1,2,(0,1)} \quad \forall \nu = \frac{j}{n}, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (5.10)$$

Dabei ist die Konstante C von u , h (und damit n) und ν unabhängig.

Beweis Sei $v \in V_h(r)$ beliebig. Da $u - P_h u \in W_0^{1,2}(0, 1)$, ist

$$\begin{aligned} u(\nu) - P_h u(\nu) &\stackrel{(5.8)}{=} a(u - P_h u, G(\cdot, \nu)) \stackrel{(5.1), (2.57)}{=} a(u - P_h u, G(\cdot, \nu) - v) \\ &\leq C_1 \|u - P_h u\|_{1,2,(0,1)} \|G(\cdot, \nu) - v\|_{1,2,(0,1)}. \end{aligned}$$

Zusammen mit der gleichen Abschätzung für $P_h u(\nu) - u(\nu)$ ergibt sich beim Übergang zum Infimum:

$$|u(\nu) - P_h u(\nu)| \leq C_1 \|u - P_h u\|_{1,2,(0,1)} \inf_{v \in V_h(r)} \|G(\cdot, \nu) - v\|_{1,2,(0,1)}. \quad (5.11)$$

Da ν ein Zerlegungspunkt der Triangulierung ist, folgt (vgl. Lemma 5.3) $G(\cdot, \nu) \in W^{r+1,2}(jh, (j+1)h)$, $0 \leq j < n$. Damit erhalten wir mit der Lagrange-Interpolation (vgl. Kapitel 3.2.1) $\Pi_{h,r} : W_0^{1,2}(0,1) \rightarrow V_h$ bezüglich der äquidistanten Stützstellen kh/r , $0 \leq k \leq nr$:

$$\begin{aligned} \inf_{v \in V_h(r)} \|G(\cdot, \nu) - v\|_{1,2,(0,1)} &\leq \|G(\cdot, \nu) - \Pi_{h,r} G(\cdot, \nu)\|_{1,2,(0,1)} \\ &\stackrel{\text{Lemma 2.8d}}{\leq} C_2 |G(\cdot, \nu) - \Pi_{h,r} G(\cdot, \nu)|_{1,2,(0,1)} \stackrel{(3.64)}{\leq} C_3 h^r \left[\sum_{j=0}^{n-1} |G(\cdot, \nu)|_{r+1,2,(jh,(j+1)h)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= C_3 h^r \left[|G(\cdot, \nu)|_{r+1,2,(0,\nu)}^2 + |G(\cdot, \nu)|_{r+1,2,(\nu,1)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \stackrel{(5.9)}{\leq} C_4 h^r \sqrt{\nu(1-\nu)}. \end{aligned}$$

■

Ist $1/a(x)$ ein (bezüglich der Zerlegung stückweises) Polynom vom Grad höchstens $r-1$, so folgt aus der Darstellung von G (Lemma 5.2), daß bei festem ν die Funktion $G(\cdot, \nu)$ ein (stückweises) Polynom vom Grad r ist und $\inf_{v \in V_h(r)} \|G(\cdot, \nu) - v\|_{1,2,(0,1)} = 0$. Also ist nach (5.11) jetzt sogar

$$u(\nu) - P_h u(\nu) = 0 \quad \forall \nu = \frac{j}{n}, \quad 0 \leq j \leq n. \quad (5.12)$$

Dieser Effekt wird z.B. in [37] über eine Tensorprodukt-Struktur ausgenutzt, um auch Superkonvergenz in den Knoten für die zweidimensionale Laplace-Gleichung nachzuweisen. Wir sehen auch, daß eine geringere Glattheit der Koeffizientenfunktion $a(x)$ zu einer geringeren Glattheit von G führt. Ist z.B. $a(x) \in W^{s,\infty}(0,1)$, $1 \leq s < r$, so gilt immerhin noch

$$|u(\nu) - P_h u(\nu)| \leq Ch^s \sqrt{\nu(1-\nu)} \|u - P_h u\|_{1,2,(0,1)}.$$

Für stückweise lineare Ansatzfunktionen, also $r = 1$, ergibt sich i.a. keine verbesserte Konvergenzordnung in den Zerlegungspunkten. Allerdings werden in [85, Kapitel 7.4] weniger glatte Koeffizientenfunktionen $a(x)$ und $b(x)$ betrachtet, so daß die Lösung u von (5.1) nicht schon in $W^{2,2}(0,1)$ liegt. Dann wird dort für den Fehler in den Zerlegungspunkten eine Abschätzung gegen einen τ -Modul bewiesen, die besser ist als die entsprechende globale gegen einen Stetigkeitsmodul.

Wir haben also mit Lemma 5.4 die Abschätzung (5.7) und damit den Satz 5.1 für $b \equiv 0$ gezeigt und wenden uns jetzt der Schärfe zu. Douglas und Dupont konstruieren in [36] im Falle $\omega(\delta) = \delta$ explizit ein Gegenbeispiel. Das dortige Vorgehen motiviert unsere Überlegungen zu den intermediären Fällen, indem wir ihre Fehlerdarstellung aufgreifen.

Satz 5.5 *Es gibt Koeffizientenfunktionen $\kappa < a(x) \in W^{r,\infty}(0,1)$, so daß bei Verwendung der Bilinearform $a(u,v) = \int_0^1 a(x)u'(x)v'(x)dx$ die folgende Schärfeaussage für $r > 1$ gilt:*

Zu jedem $0 < \delta_0 < 1/2$ und jedem abstrakten Stetigkeitsmodul ω mit $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$ existiert ein Gegenbeispiel $u_\omega \in W_0^{1,2}(0,1) \cap W^{2,2}(0,1)$, das nach Lemma 4.13 Lösung einer Aufgabe (5.1) mit durch u_ω bestimmter Inhomogenität $f = f_{u_\omega}$ ist, so daß $(\delta \rightarrow 0+, h = 1/n \rightarrow 0+)$

$$\omega_{r-1}^{(2)}(\delta, u_\omega, L^2(0,1)) = \mathcal{O}(\omega(\delta^{r-1})),$$

aber

$$|u_\omega(\nu) - (u_\omega)_h(\nu)| \neq o(h^{r+1}\omega(h^{r-1}))$$

für jedes $\nu \in \mathbb{B} := \{j/2^n : 1 \leq j < 2^n, n \in \mathbb{N}\} \cap (\delta_0, 1 - \delta_0)$. Insbesondere ist also u_ω ein gemeinsames Gegenbeispiel unabhängig vom Punkt $\nu \in \mathbb{B}$.

Da die in Satz 5.5 angegebene Bilinearform insbesondere den Voraussetzungen des Satzes 5.1 ($b(x) \equiv 0$, vgl. Lemma 5.4) genügt, folgt damit die Schärfe der direkten Abschätzung (5.6). Im Beweis wird zunächst $a(x)$ konkret so gewählt, daß $1/a(x)$ auf $[0, 1/2]$ und $(1/2, 1]$ ein Polynom vom Grad r ist. Dann wird dazu die Funktion u_ω erzeugt. Durch $a(\cdot, \cdot)$ und u_ω ist schließlich auch die Inhomogenität $f = f_{u_\omega}$ festgelegt. Zur Vorbereitung auf den Beweis ziehen wir drei Hilfssätze vor.

Eine Funktion f auf $[0, 1]$ heißt **gerade** (bzw. **ungerade**) bezüglich $1/2$, falls (f.ü.)

$$f(1/2 - x) = f(1/2 + x), \quad 0 \leq x \leq 1/2$$

$$(\text{bzw. } f(1/2 - x) = -f(1/2 + x), \quad 0 \leq x \leq 1/2).$$

Offensichtlich ist dazu $f(x) = f(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$, (bzw. $f(x) = -f(1-x)$, $0 \leq x \leq 1$) äquivalent.

Lemma 5.6

a) *Ist $f \in W^{1,2}(0,1)$ und gerade (bzw. ungerade) bezüglich $1/2$, so ist f' ungerade (bzw. gerade) bezüglich $1/2$.*

b) *Sei $f \in L^1(0,1)$ und $F(x) := \int_0^x f(t)dt$. Ist f gerade (bzw. ungerade) bezüglich $1/2$, so ist $F(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 f(t)dt$ ungerade (bzw. gerade) bezüglich $1/2$.*

Beweis a) ist trivial, zu b): Ist f ungerade, so ist $\int_0^1 f(t)dt = 0$ und $(0 \leq x \leq 1/2)$

$$F(1/2 + x) = \int_0^{1/2-x} f(t)dt + \underbrace{\int_{1/2-x}^{1/2+x} f(t)dt}_{=0} = F(1/2 - x).$$

Ist f gerade:

$$F(1/2 + x) = \int_0^1 f(t)dt - \int_{1/2+x}^1 f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt - F(1/2 - x),$$

$$F(1/2 + x) - \frac{1}{2} \int_0^1 f(t)dt = -F(1/2 - x) + \frac{1}{2} \int_0^1 f(t)dt.$$

■

Lemma 5.7 *Seien $a(x) > \kappa$ (Lipschitz-stetig) und gerade bezüglich $1/2$ sowie $b \equiv 0$. Die Triangulierung \mathcal{T}_h sei wie oben äquidistant, so daß $1/2$ ein Zerlegungspunkt ist (n gerade). Ist $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$ gerade bezüglich $1/2$, so ist auch $P_h u$ gerade bezüglich $1/2$.*

Beweis Wir zeigen, daß $v_h(x) := P_h u(1 - x) = [P_h u] \circ (1 - x)$ ebenfalls $a(v_h, v) = a(u, v) \quad \forall v \in V_h$ erfüllt. Aus der Eindeutigkeit der Lösung folgt dann $P_h u = v_h$ und damit die Behauptung. Dazu sei $v \in V_h$ beliebig, und wir setzen $\tilde{v}(x) = v(1 - x)$, so daß $\tilde{v}'(x) = -v'(1 - x)$ (f.ü.). Wegen der Symmetrie von \mathcal{T}_h ist auch $\tilde{v} \in V_h$. Da u gerade, ist u' ungerade (Lemma 5.6a)), und wir erhalten:

$$\begin{aligned} a(v_h, v) &= \int_0^1 a(x) v_h'(x) v'(x) dx = - \int_0^1 a(x) (P_h u)'(1 - x) v'(x) dx \\ &\stackrel{t=1-x}{=} - \int_0^1 \underbrace{a(1-t)}_{=a(t)} \underbrace{(P_h u)'(t)}_{=-v'(1-t)} v'(1-t) dt = \int_0^1 a(t) (P_h u)'(t) \tilde{v}'(t) dt \\ &\stackrel{(2.57)}{=} \int_0^1 a(t) u'(t) \tilde{v}'(t) dt \stackrel{1-x=t, a \text{ gerade}}{=} \int_0^1 a(x) u'(1-x) \tilde{v}'(1-x) dx \\ &\stackrel{u' \text{ ungerade}}{=} \int_0^1 a(x) [-u'(x)] \tilde{v}'(1-x) dx = - \int_0^1 a(x) [-u'(x)] v'(x) dx \\ &= a(u, v). \end{aligned}$$

■

Sei nun

$$\mathcal{P}_{r,h} := \{z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : z|_{(jh, (j+1)h)} \in \mathcal{P}_r(jh, (j+1)h), 0 \leq j \leq n-1\}, \quad (5.13)$$

d.h., im Gegensatz zu V_h ist hier keine Stetigkeit oder Randbedingung gefordert (vgl. (5.3)).

Lemma 5.8 *Seien $a(x) > \kappa$ (Lipschitz-stetig), $b(x) \equiv 0$ und $u \in W_0^{1,2}(0, 1)$. Falls gilt*

$$(a \cdot [u - P_h u]', 1)_{L^2(0,1)} = 0, \quad (5.14)$$

so ist auch

$$(a \cdot [u - P_h u]', z)_{L^2(0,1)} = 0 \quad \forall z \in \mathcal{P}_{r-1,h}.$$

Beweis Zu $z \in \mathcal{P}_{r-1,h}$ setze $v(x) := \int_0^x z(t)dt - x \int_0^1 z(t)dt$. Damit ist $v \in \mathcal{P}_{r,h} \cap C[0,1]$, und die Konstruktion sichert zudem $v(0) = v(1) = 0$, so daß $v \in V_h(r)$. Damit erhalten wir für $e(x) := (u - P_h u)(x)$:

$$\begin{aligned} (ae', z)_{L^2(0,1)} &= (ae', v')_{L^2(0,1)} + (ae', \int_0^1 z(t)dt)_{L^2(0,1)} \\ &= (ae', v')_{L^2(0,1)} + (ae', 1)_{L^2(0,1)} \int_0^1 z(t)dt \\ &\stackrel{(5.14)}{=} (ae', v')_{L^2(0,1)} \stackrel{(5.1)}{=} a(e, v) \stackrel{(2.57)}{=} 0. \end{aligned}$$

■

Beweis zu Satz 5.5 Wir benutzen Satz 2.31 mit den folgenden Setzungen ($h = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$):

$$X = W_0^{1,2}(0,1) \cap W^{2,2}(0,1), \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{2,2,(0,1)}, \quad \varphi_n = \frac{1}{2^{(r-1)n}} = h^{r-1}, \quad \sigma(\delta) = \delta^{r-1},$$

$$S_\delta u = \omega_{r-1}^{(2)}(\delta, u, L^2(0,1)), \quad \mathbb{B}_n := \left\{ \frac{j}{2^n} : 1 \leq j \leq 2^n - 1 \right\} \cap (\delta_0, 1 - \delta_0),$$

$$T_{n,\nu} u = 2^{(r+1)n} |(u - P_h u)(\nu)| = h^{-(r+1)} |(u - P_h u)(\nu)|, \quad \nu \in \mathbb{B}_n.$$

Zum Beweis der Schärfe genügt es natürlich, statt $h = 1/n$ wieder nur die Teilfolge $h = 2^{-n}$ zu betrachten. Dies sichert zum einen, daß $1/2$ Zerlegungspunkt ist (was wir später bei der Anwendung von Lemma 5.7 benötigen), zum anderen ist $\mathbb{B}_n \subset \mathbb{B}_{n+1} \subset \dots \subset \mathbb{B} = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{B}_n$. Weiter ist (vgl. (2.8), Satz 2.9) $T_{n,\nu} \in W_0^{1,2}(0,1)^\sim \subset X^\sim$ und nach Lemma 2.16a) $S_\delta \in X^\sim$.

Als nächstes legen wir die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ fest: Die Koeffizientenfunktion $a(x) \in W^{r,\infty}(0,1)$ sei gerade bezüglich $1/2$, $a(x) > \kappa > 0$, und erfülle die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a(x)} &\in \mathcal{P}_r[0,1] \text{ mit } \left(\frac{1}{a(x)} \right)^{(r)} = r!, \text{ falls } r \text{ gerade und} \\ \frac{1}{a(x)} &\in \mathcal{P}_r[0,1/2] \cap \mathcal{P}_r(1/2,1] \text{ mit } \left(\frac{1}{a(x)} \right)^{(r)} = \begin{cases} r!, & x \in [0,1/2] \\ -r!, & x \in (1/2,1] \end{cases}, \text{ falls } r \text{ ungerade.} \end{aligned} \tag{5.15}$$

Man beachte, daß die Fallunterscheidung notwendig ist, damit $1/a(x)$ und damit $a(x)$ gerade bezüglich $1/2$ sein kann (vgl. Lemma 5.6b)). Die folgende Setzung ist also z.B. möglich:

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^r + 1}, \quad \text{falls } r \text{ gerade} \\ a(x) &= \begin{cases} \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^r + 1}, & x \in [0,1/2] \\ \frac{1}{1 - \left(x - \frac{1}{2}\right)^r}, & x \in (1/2,1] \end{cases}, \quad \text{falls } r \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

Insbesondere ist $1/a(x)$ kein stückweises Polynom vom Grad $r - 1$ sondern vom echten stückweisen Grad r . Dies ist nach (5.12) für den weiteren Schärfebeweis auch zwingend erforderlich. Die Tatsache, daß $a(x)$ gerade ist, wird später noch für eine Fehlerdarstellung von Bedeutung sein (vgl. (5.31), (5.32)).

Die Wahl der Resonanzelemente ist hier komplizierter. Wir definieren zunächst eine Folge $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mit der wir die Resonanzbedingung (2.36) nachweisen können. Diese erweist sich aber als nicht glatt genug, um die Jackson-Bernstein-Typ-Bedingung (2.33) zu erfüllen. Daher wird sie noch mittels Teilung der Einheit so zur Folge $(g_{n,\varepsilon})_{n \in \mathbb{N}}$ geglättet, daß wir zur Diskussion der Resonanzbedingung bei geschickter Wahl von ε statt mit $(g_{n,\varepsilon})_{n \in \mathbb{N}}$ unter Ausnutzung der Stabilität der Finite-Elemente-Methode doch mit $(\tilde{g}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rechnen können. Zunächst definieren wir die Hilfsfunktion ($0 \leq j \leq 2^n - 1$, vgl. Abbildung 5.1)

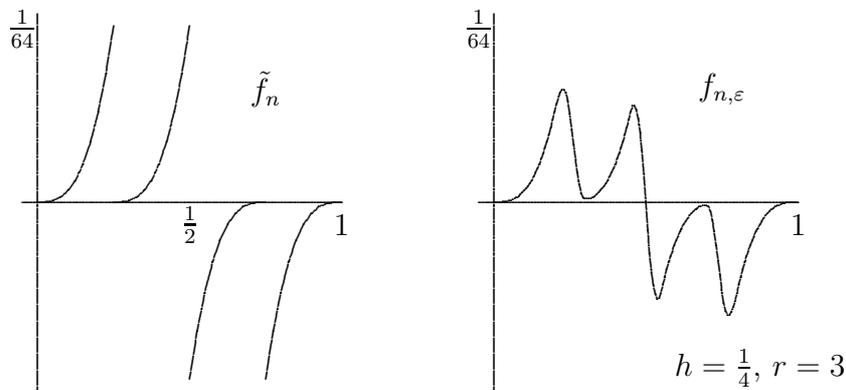


Abbildung 5.1: Übergang von $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zur geglätteten Folge $(f_{n,\varepsilon})_{n \in \mathbb{N}}$

$$\tilde{f}_n(x) := \begin{cases} 0 & : x = 0 \\ (x - jh)^r & : x \in (jh, (j+1)h] \text{ für } j \leq 2^{n-1} - 1 \\ -((j+1)h - x)^r & : x \in (jh, (j+1)h] \text{ für } j \geq 2^{n-1}, \text{ d.h. } jh \geq 1/2. \end{cases}$$

Offensichtlich ist

$$\|\tilde{f}_n\|_{L^\infty(0,1)} = h^r. \quad (5.16)$$

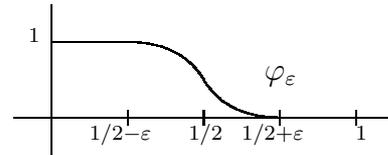
Damit ist

$$\tilde{g}_n(x) := \frac{1}{h^{r-1}} \int_0^x \tilde{f}_n(t) dt$$

eine Funktion, die stückweise mit Polynomen vom Grad $r + 1$ übereinstimmt. Bei der angestrebten Abschätzung des Fehlers nach unten wird diese Setzung im Zusammenspiel mit dem Polynomgrad von $1/a(x)$ Positivität ermöglichen (vgl. (5.34)). Nach Konstruktion ist \tilde{f}_n ungerade bezüglich $1/2$, und \tilde{g}_n ist gerade (Lemma 5.6b), so daß $\tilde{g}_n(0) = \tilde{g}_n(1) = 0$. Also ist $\tilde{g}_n \in W_0^{1,2}(0,1)$, und wir können später $T_{n,\nu} \tilde{g}_n$ ausrechnen.

Wir glätten aber zunächst \tilde{f}_n mittels Teilung der Einheit. Sei dazu $0 < \varepsilon < 1/4$ und $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 1/2 - \varepsilon \\ 0 & : x \geq 1/2 + \varepsilon, \end{cases}$$



sowie $0 \leq \varphi_\varepsilon(x) \leq 1$ für $x \in \mathbb{R}$. Daneben sei φ_ε symmetrisch zum Punkt $(1/2, 1/2)$ im Sinne von

$$\varphi_\varepsilon(x) = 1 - \varphi_\varepsilon(1 - x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.17)$$

d.h., $\varphi_\varepsilon(x) - 1/2 = -(\varphi_\varepsilon(1 - x) - 1/2)$; die Funktion $\varphi_\varepsilon(x) - 1/2$ sei also ungerade bezüglich $1/2$. Die folgende Wahl erfüllt z.B. diese Bedingungen: Zunächst existiert ein $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\varphi(x) = 1$ für $x \leq 0$, $\varphi(x) = 0$ für $x \geq 1$ und $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ für $x \in [0, 1]$ (vgl. [58, S.35]). Damit setzen wir:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{x - (\frac{1}{2} - \varepsilon)}{\varepsilon}\right) & \text{für } x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1 - x - (\frac{1}{2} - \varepsilon)}{\varepsilon}\right) & \text{für } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (5.18)$$

Mittels dieser Funktion definieren wir (vgl. Abbildungen 5.1–5.3)

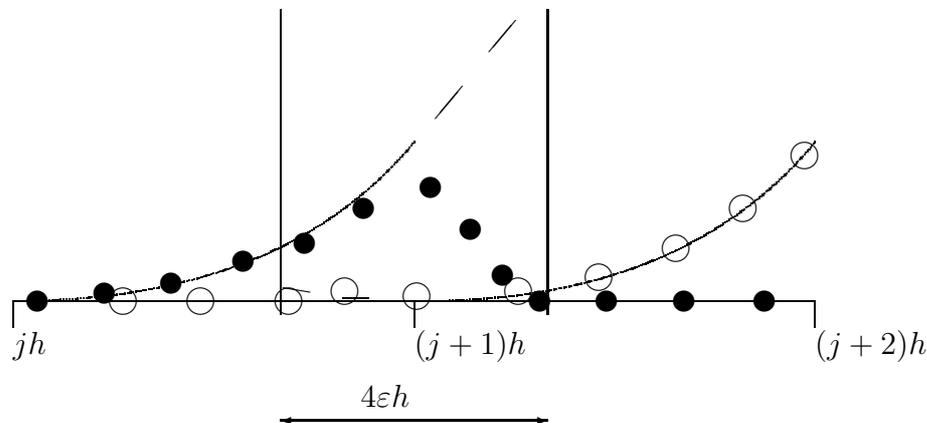


Abbildung 5.2: Glättung auf $[(j+1)h - 2\varepsilon h, (j+1)h + 2\varepsilon h]$: Die gepunkteten Graphen entsprechen $\varphi_\varepsilon\left(\frac{x-jh}{2h}\right)(x-jh)^r$ und $[1 - \varphi_\varepsilon\left(\frac{x-jh}{2h}\right)](x-(j+1)h)^r$.

a) für $x \in [(j+1/2)h, (j+3/2)h]$, $0 \leq j \leq 2^{n-1} - 2$:

$$f_{n,\varepsilon}(x) := \varphi_\varepsilon\left(\frac{x-jh}{2h}\right)(x-jh)^r + \left(1 - \varphi_\varepsilon\left(\frac{x-jh}{2h}\right)\right)(x-(j+1)h)^r;$$

b) für $x \in [(j + 1/2)h, (j + 3/2)h]$, $2^{n-1} \leq j \leq 2^n - 2$:

$$f_{n,\varepsilon}(x) := -\varphi_\varepsilon\left(\frac{x - jh}{2h}\right) ((j + 1)h - x)^r - \left(1 - \varphi_\varepsilon\left(\frac{x - jh}{2h}\right)\right) ((j + 2)h - x)^r;$$

c) für $x \in [(2^{n-1} - 1/2)h, (2^{n-1} + 1/2)h] = [(j + 1/2)h, (j + 3/2)h]$ für $j = 2^{n-1} - 1$:

$$f_{n,\varepsilon}(x) := \varphi_\varepsilon\left(\frac{x - jh}{2h}\right) (x - jh)^r - \left(1 - \varphi_\varepsilon\left(\frac{x - jh}{2h}\right)\right) ((j + 2)h - x)^r;$$

d) für $x \in [0, h/2] \cup [1 - h/2, 1]$: $f_{n,\varepsilon}(x) := \tilde{f}_n(x)$.

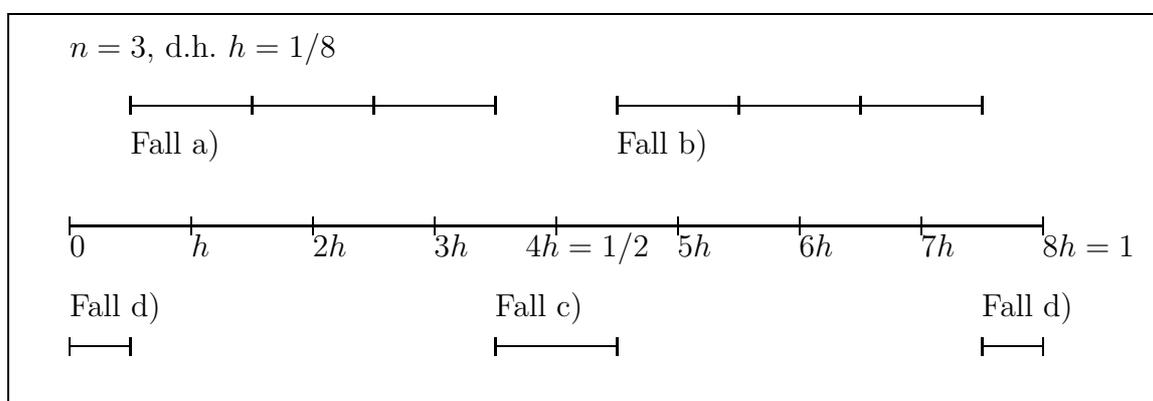


Abbildung 5.3: Zur Konstruktion von $f_{n,\varepsilon}$

Dabei ist zu beachten, daß für $x \in [(j + 1/2)h, (j + 3/2)h]$ gilt:

$$\frac{1}{4} \leq \frac{x - jh}{2h} \leq \frac{3}{4}$$

und $(0 \leq j \leq 2^n - 2)$

$$\varphi_\varepsilon\left(\frac{x - jh}{2h}\right) = \begin{cases} 1 & : x \leq (j + 1)h - 2\varepsilon h \\ 0 & : x \geq (j + 1)h + 2\varepsilon h. \end{cases}$$

Da $\varepsilon < 1/4$, sind die von der Teilung der Einheit betroffenen Übergangintervalle disjunkt, und $f_{n,\varepsilon}$ ist unendlich oft differenzierbar auf $[0, 1]$. Außerdem unterscheiden sich \tilde{f}_n und $f_{n,\varepsilon}$ nur in den Kugeln $S(2\varepsilon h, jh)$, $1 \leq j \leq 2^n - 1$. Für $x \in [(j + 1/2)h, (j + 3/2)h]$ ist $0 < (x - jh)^r \leq (\frac{3}{2}h)^r$, $|(x - (j + 1)h)^r| \leq (\frac{1}{2}h)^r$ und $0 < ((j + 2)h - x)^r \leq (\frac{3}{2}h)^r$, so daß unter Beachtung der Definition von φ_ε folgt:

$$\|f_{n,\varepsilon}\|_{C[0,1]} \leq \left(\frac{3}{2}h\right)^r. \quad (5.19)$$

Wir zeigen jetzt, daß wegen (5.17) die Funktionen $f_{n,\varepsilon}$ ungerade bezüglich $1/2$ sind, d.h., $f_{n,\varepsilon}(x) = -f_{n,\varepsilon}(1 - x)$. Ist $x \in [0, h/2] \cup [1 - h/2, 1]$, so folgt dies sofort aus der

Definition von \tilde{f}_n (Fall d)). Sei also $x \in [(j + 1/2)h, (j + 3/2)h]$ für ein $0 \leq j \leq 2^n - 2$. Dann ist

$$\begin{aligned} 1 - x \in [1 - (j + 3/2)h, 1 - (j + 1/2)h] &= [(2^n - j - 3/2)h, (2^n - j - 1/2)h] \\ &= [(k + 1/2)h, (k + 3/2)h] \end{aligned}$$

für $k = 2^n - 2 - j$. Aus

$$(k + 2)h - (1 - x) = (2^n - j)h - (1 - x) = 1 - jh - 1 + x = x - jh \quad (5.20)$$

erhalten wir auch:

$$(k + 1)h - (1 - x) = x - (j + 1)h, \quad (5.21)$$

$$(k + 2)h - x = (1 - x) - jh, \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \varphi_\varepsilon \left(\frac{(1 - x) - kh}{2h} \right) &\stackrel{(5.17)}{=} 1 - \varphi_\varepsilon \left(1 - \frac{(1 - x) - kh}{2h} \right) \\ &= 1 - \varphi_\varepsilon \left(\frac{(k + 2)h - (1 - x)}{2h} \right) \\ &\stackrel{(5.20)}{=} 1 - \varphi_\varepsilon \left(\frac{x - jh}{2h} \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Ist $j \leq 2^{n-1} - 2$, d.h., wir betrachten den Fall a), so gilt damit:

$$\begin{aligned} f_{n,\varepsilon}(x) &\stackrel{(5.23),(5.20),(5.21)}{=} \left[1 - \varphi_\varepsilon \left(\frac{(1 - x) - kh}{2h} \right) \right] [(k + 2)h - (1 - x)]^r + \\ &\quad + \varphi_\varepsilon \left(\frac{(1 - x) - kh}{2h} \right) [(k + 1)h - (1 - x)]^r \\ &\stackrel{\text{Fall b)}}{=} -f_{n,\varepsilon}(1 - x). \end{aligned}$$

Im Fall b) verfare analog, es bleibt der Fall c), also $j = k = 2^{n-1} - 1$:

$$\begin{aligned} f_{n,\varepsilon}(x) &\stackrel{(5.23),(5.20),(5.22)}{=} \left[1 - \varphi_\varepsilon \left(\frac{(1 - x) - jh}{2h} \right) \right] [(j + 2)h - (1 - x)]^r - \\ &\quad - \varphi_\varepsilon \left(\frac{(1 - x) - jh}{2h} \right) [(1 - x) - jh]^r \\ &= -f_{n,\varepsilon}(1 - x). \end{aligned}$$

Nach Konstruktion der $f_{n,\varepsilon}$ erfüllen also die Resonanzelemente

$$g_{n,\varepsilon}(x) = \frac{1}{h^{r-1}} \int_0^x f_{n,\varepsilon}(t) dt$$

die Randbedingungen $g_{n,\varepsilon}(0) = g_{n,\varepsilon}(1) = 0$ (da $f_{n,\varepsilon}$ ungerade) und sind beliebig oft differenzierbar. Der Parameter ε wird später festgelegt. Wir schätzen jetzt die Ableitungen ab. Für $1 \leq k \leq r + 1$ und $x \in [(2^{n-1} - 1/2)h, (2^{n-1} + 1/2)h]$, d.h. Fall c),

ist

$$\begin{aligned}
& |f_{n,\varepsilon}^{(k-1)}(x)| \\
&= \left| \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \left(\left[\varphi_\varepsilon \left(\frac{x - (2^{n-1} - 1)h}{2h} \right) \right]^{(i)} [(x - (2^{n-1} - 1)h)^r]^{(k-1-i)} - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left[1 - \varphi_\varepsilon \left(\frac{x - (2^{n-1} - 1)h}{2h} \right) \right]^{(i)} [((2^{n-1} + 1)h - x)^r]^{(k-1-i)} \right) \right| \\
&\leq [\|\varphi_\varepsilon\|_{r,[0,1]} + \|1 - \varphi_\varepsilon\|_{r,[0,1]}] \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{1}{(2h)^i} \frac{r!}{(r - (k-1-i))!} \left(\frac{3}{2}h\right)^{r-(k-1-i)} \\
&\leq [1 + 2\|\varphi_\varepsilon\|_{r,[0,1]}] h^{r+1-k} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} \frac{r! 3^{r-(k-1-i)}}{(r - (k-1-i))! 2^{r-(k-1-i)+i}} \\
&\leq C_\varepsilon h^{r+1-k},
\end{aligned}$$

und für die restlichen $x \in [0, 1]$ läßt sich $|f_{n,\varepsilon}^{(k-1)}(x)|$ analog gegen einen Ausdruck der Form $C_\varepsilon h^{r+1-k}$ abschätzen, so daß ($1 \leq k \leq r+1$)

$$|g_{n,\varepsilon}|_{k,2,(0,1)} = \frac{1}{h^{r-1}} \|f_{n,\varepsilon}^{(k-1)}\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{h^{r-1}} \|f_{n,\varepsilon}^{(k-1)}\|_{C[0,1]} \leq C_\varepsilon h^{2-k}. \quad (5.24)$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned}
\|g_{n,\varepsilon}\|_{2,2,(0,1)} &\leq \|g_{n,\varepsilon}\|_{1,2,(0,1)} + |g_{n,\varepsilon}|_{2,2,(0,1)} \\
&\stackrel{\text{Lemma 2.8d}}{\leq} C_1 (|g_{n,\varepsilon}|_{1,2,(0,1)} + |g_{n,\varepsilon}|_{2,2,(0,1)}) \stackrel{(5.24)}{\leq} C_{2,\varepsilon}, \quad (5.25)
\end{aligned}$$

so daß die Bedingung (2.32) erfüllt ist. Ebenfalls erhalten wir (2.33) mit Lemma 2.16:

$$\omega_{r-1}^{(2)}(\delta, g_{n,\varepsilon}, L^2(0,1)) \leq \begin{cases} C_1 |g_{n,\varepsilon}|_{2,2,(0,1)} \stackrel{(5.24)}{\leq} C_{2,\varepsilon} \\ C_1 \delta^{r-1} |g_{n,\varepsilon}|_{r+1,2,(0,1)} \stackrel{(5.24)}{\leq} C_{2,\varepsilon} \delta^{r-1} h^{2-(r+1)} = C_{2,\varepsilon} \sigma(\delta) / \varphi_n. \end{cases}$$

Jetzt zum Nachweis der Resonanzbedingung (2.36): Als erstes untersuchen wir, wie weit sich die $g_{n,\varepsilon}$ durch die Glättung von den ursprünglichen \tilde{g}_n entfernt haben. Dabei erweist sich die Poincaré-Ungleichung, die in dieser eindimensionalen Situation direkt aus einer Taylor-Entwicklung folgt, als sehr nützlich:

$$\begin{aligned}
\|\tilde{g}_n - g_{n,\varepsilon}\|_{1,2,(0,1)} &\stackrel{\text{Lemma 2.8d}}{\leq} C_1 |\tilde{g}_n - g_{n,\varepsilon}|_{1,2,(0,1)} = \frac{C_1}{h^{r-1}} \|\tilde{f}_n - f_{n,\varepsilon}\|_{L^2(0,1)} \\
&= \frac{C_1}{h^{r-1}} \left[\sum_{j=0}^{2^n-2} \int_{(j+1)h-2\varepsilon h}^{(j+1)h+2\varepsilon h} |\tilde{f}_n(x) - f_{n,\varepsilon}(x)|^2 dx \right]^{1/2} \\
&\leq \frac{C_1}{h^{r-1}} \underbrace{[(2^n - 1)4\varepsilon h]^{1/2}}_{\leq h^{-1}} \|\tilde{f}_n - f_{n,\varepsilon}\|_{L^\infty(0,1)} \\
&\leq \frac{2\sqrt{\varepsilon}C_1}{h^{r-1}} \left(\|\tilde{f}_n\|_{L^\infty(0,1)} + \|f_{n,\varepsilon}\|_{C[0,1]} \right) \\
&\stackrel{(5.16),(5.19)}{\leq} C_2 h \sqrt{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Dabei ist die Konstante C_2 von ε (und h) unabhängig. Mit der Stabilität (2.60) erhalten wir daraus:

$$\|P_h(\tilde{g}_n - g_{n,\varepsilon})\|_{1,2,(0,1)} \leq C_1 \|\tilde{g}_n - g_{n,\varepsilon}\|_{1,2,(0,1)} \leq C_2 h \sqrt{\varepsilon}. \quad (5.26)$$

Bringen wir auch noch die direkte Abschätzung (5.10) ein, so folgt für $\nu \in \mathbb{B}_n$ weiter:

$$\begin{aligned} & |(\tilde{g}_n - P_h \tilde{g}_n)(\nu)| \\ &= |(g_{n,\varepsilon} - P_h g_{n,\varepsilon})(\nu)| + |(g_{n,\varepsilon} - \tilde{g}_n)(\nu) - P_h(g_{n,\varepsilon} - \tilde{g}_n)(\nu)| \\ &\stackrel{(5.10)}{\leq} |(g_{n,\varepsilon} - P_h g_{n,\varepsilon})(\nu)| + \\ &\quad + C_1 h^r \sqrt{\nu(1-\nu)} \|g_{n,\varepsilon} - \tilde{g}_n - P_h(g_{n,\varepsilon} - \tilde{g}_n)\|_{1,2,(0,1)} \\ &\leq |(g_{n,\varepsilon} - P_h g_{n,\varepsilon})(\nu)| + \\ &\quad + C_1 h^r \sqrt{\nu(1-\nu)} [\|P_h(g_{n,\varepsilon} - \tilde{g}_n)\|_{1,2,(0,1)} + \|g_{n,\varepsilon} - \tilde{g}_n\|_{1,2,(0,1)}] \\ &\stackrel{(5.26)}{\leq} |(g_{n,\varepsilon} - P_h g_{n,\varepsilon})(\nu)| + C_2 h^{r+1} \sqrt{\nu(1-\nu)} \sqrt{\varepsilon}, \end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned} T_{n,\nu} g_{n,\varepsilon} &= h^{-(r+1)} |(g_{n,\varepsilon} - P_h g_{n,\varepsilon})(\nu)| \\ &\geq h^{-(r+1)} |(\tilde{g}_n - P_h \tilde{g}_n)(\nu)| - C_2 \sqrt{\nu(1-\nu)} \sqrt{\varepsilon} \\ &= T_{n,\nu} \tilde{g}_n - C_2 \underbrace{\sqrt{\nu(1-\nu)}}_{<1} \sqrt{\varepsilon} \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$> T_{n,\nu} \tilde{g}_n - C_2 \sqrt{\varepsilon}. \quad (5.28)$$

Wir werden gleich zeigen, daß

$$T_{n,\nu} \tilde{g}_n \geq c \min\{\nu, 1-\nu\} \quad (5.29)$$

für $\nu \in \mathbb{B}_n$ und $n \in \mathbb{N}$ ist. Nach Definition von \mathbb{B}_n ist $\min\{\nu, 1-\nu\} > \delta_0 > 0$, so daß für $\varepsilon \leq \min\left\{\frac{1}{4}, \left(\frac{c\delta_0}{2C_2}\right)^2\right\}$ gilt: $T_{n,\nu} g_{n,\varepsilon} \geq c\delta_0 - c\delta_0/2 = c\delta_0/2$. Damit haben wir für dieses spezielle ε eine Resonanzfolge gefunden, die (2.36) und, wie wir bereits oben gesehen haben, auch (2.32) und (2.33) erfüllt. Die Bedingung (2.39), die (2.34) und (2.35) impliziert, folgt wieder aus der direkten Abschätzung in Satz 5.1, die unabhängig von $\nu \in \mathbb{B}_n$ ist:

$$T_{n,\nu} u \leq \frac{1}{h^{r+1}} C h^{r+1} \omega_{r-1}^{(2)}(h, u, L^2(0, 1)) = C S_h u = C S_{\sigma^{-1}(\varphi_n)} u, \quad u \in X.$$

Die Aussage des Satzes 5.5 folgt jetzt mit Satz 2.31, wobei mittels partieller Integration auch folgt, daß zum Gegenbeispiel $u_\omega \in W_0^{1,2}(0, 1) \cap W^{2,2}(0, 1)$ eine geeignete Inhomogenität $f_\omega \in L^2(0, 1)$ gehört (siehe Lemma 4.13, beachte: $a(x) \in C^1[0, 1]$, da $r > 1$).

Wir müssen also noch (5.29) beweisen. Dazu setzen wir $e_n(x) := \tilde{g}_n(x) - P_h \tilde{g}_n(x)$. Nach Lemma 5.7 ist $P_h \tilde{g}_n$ gerade bezüglich $1/2$, so daß auch e_n gerade und e'_n nach

Lemma 5.6a) ungerade bezüglich $1/2$ ist. Dabei beachte man, daß nach Konstruktion $a(x)$ gerade ist (vgl. (5.15)). So ist auch $a(x)e'_n(x)$ ungerade bezüglich $1/2$ und

$$(ae'_n, 1)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 a(x)e'_n(x)dx = 0.$$

Damit ist (5.14) erfüllt, und mit Lemma 5.8 erhalten wir

$$(ae'_n, z)_{L^2(0,1)} = 0 \quad \forall z \in \mathcal{P}_{r-1,h}. \quad (5.30)$$

Man beachte, daß die Symmetrie von $a(x)$ und \tilde{g}_n die Gleichung (5.14) und damit (5.30) liefert. Mit (5.30) bekommen wir die folgenden Fehlerdarstellungen (vgl. [36]):

$$e_n(\nu) = \int_0^\nu a(x)e'_n(x) \left[\frac{1}{a(x)} - z(x) \right] dx \quad (5.31)$$

$$= - \int_\nu^1 a(x)e'_n(x) \left[\frac{1}{a(x)} - z(x) \right] dx \quad \forall z \in \mathcal{P}_{r-1,h}, \nu \in \mathbb{B}_n. \quad (5.32)$$

Zum Beweis von (5.31) definieren wir zu $z \in \mathcal{P}_{r-1,h}$ und $\nu \in \mathbb{B}_n$ die Funktion

$$\tilde{z}(x) := \begin{cases} z(x) & \text{für } x \leq \nu \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

die damit selbst auch in $\mathcal{P}_{r-1,h}$ enthalten ist, d.h.,

$$0 \stackrel{(5.30)}{=} \int_0^1 a(x)e'_n(x)\tilde{z}(x)dx = \int_0^\nu a(x)e'_n(x)z(x)dx, \quad (5.33)$$

so daß (beachte $a(x) > \kappa > 0$)

$$e_n(\nu) = \int_0^\nu e'_n(x)dx \stackrel{(5.33)}{=} \int_0^\nu a(x)e'_n(x) \left[\frac{1}{a(x)} - z(x) \right] dx.$$

Die Darstellung (5.32) folgt analog.

Wir nutzen jetzt die Fehlerdarstellungen für eine Abschätzung nach unten. Dazu sehen wir uns zunächst die Leitkoeffizienten der stückweisen Polynome r -ten Grades e'_n und $1/a$ an. Der Leitkoeffizient von e'_n ist der von $h^{1-r}\tilde{f}_n$ (da \tilde{f}_n stückweise Grad r , v' für $v \in V_h$ aber nur Grad $r-1$ hat), der von $1/a$ wurde bei der Definition von $a(x)$ festgelegt (siehe (5.15)):

	r gerade	r ungerade
Leitkoeffizient von $1/a(x)$	+1	+1, falls $x \leq 1/2$ -1, falls $x > 1/2$
Leitkoeffizient von $e'_n(x)$	$+h^{1-r}$, falls $x \leq 1/2$ $-h^{1-r}$, falls $x > 1/2$	$+h^{1-r}$

Damit läßt sich ein $z_n \in \mathcal{P}_{r-1,h}$ so wählen, daß für $x \in (jh, (j+1)h]$, $0 \leq j < 2^n$, gilt:

$$e'_n(x) \left[\frac{1}{a(x)} - z_n(x) \right] = \begin{cases} +h^{r-1}[e'_n(x)]^2 & \text{für } j < 2^{n-1}, \text{ also } x \leq 1/2 \\ -h^{r-1}[e'_n(x)]^2 & \text{für } j \geq 2^{n-1}, \text{ also } x > 1/2. \end{cases} \quad (5.34)$$

Setzen wir nämlich

$$z_n(x) = \begin{cases} -h^{r-1}e'_n(x) + \frac{1}{a(x)} & \text{für } j < 2^{n-1}, \text{ also } x \leq \frac{1}{2} \\ +h^{r-1}e'_n(x) + \frac{1}{a(x)} & \text{für } j \geq 2^{n-1}, \text{ also } x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

so ist die höchste, stückweise auftretende Potenz von z_n nur noch x^{r-1} , also $z_n \in \mathcal{P}_{r-1,h}$. Ist nun $\nu \leq 1/2$, so erhalten wir aus (5.31):

$$\begin{aligned} T_{n,\nu}\tilde{g}_n &= \frac{1}{h^{r+1}}|e_n(\nu)| \\ &\stackrel{(5.31)}{\geq} \frac{1}{h^{r+1}} \int_0^\nu a(x)e'_n(x) \left[\frac{1}{a(x)} - z_n(x) \right] dx \\ &= \frac{1}{h^{r+1}} \sum_{j=0}^{\frac{\nu}{h}-1} \int_{jh}^{(j+1)h} a(x)e'_n(x) \left[\frac{1}{a(x)} - z_n(x) \right] dx \\ &\stackrel{(5.34)}{=} \frac{h^{r-1}}{h^{r+1}} \sum_{j=0}^{\frac{\nu}{h}-1} \int_{jh}^{(j+1)h} a(x)[e'_n(x)]^2 dx \\ &\geq \underbrace{\left(\inf_{x \in [0,1]} a(x) \right)}_{\geq \kappa} \frac{1}{h^2} \sum_{j=0}^{\frac{\nu}{h}-1} \int_{jh}^{(j+1)h} [e'_n(x)]^2 dx. \end{aligned}$$

Wegen der Positivität von $[e'_n(x)]^2$ gestaltet sich die weitere Abschätzung nach unten elementar. Da $P_h\tilde{g}_n \in \mathcal{P}_r(jh, (j+1)h]$, ist $(P_h\tilde{g}_n)' \in \mathcal{P}_{r-1}(jh, (j+1)h]$, so daß

$$\begin{aligned} T_{n,\nu}\tilde{g}_n &\geq \frac{\kappa}{h^2} \sum_{j=0}^{\frac{\nu}{h}-1} \inf_{v \in \mathcal{P}_{r-1}(jh, (j+1)h]} \int_{jh}^{(j+1)h} \underbrace{[\tilde{g}'_n(x) - v(x)]^2}_{=h^{1-r}\tilde{f}'_n(x)} dx \\ &= \frac{\kappa}{h^2} \sum_{j=0}^{\frac{\nu}{h}-1} \inf_{v \in \mathcal{P}_{r-1}(jh, (j+1)h]} \int_{jh}^{(j+1)h} \left[\frac{1}{h^{r-1}}(x-jh)^r - v(x) \right]^2 dx \\ &= \frac{\kappa}{h^2} \sum_{j=0}^{\frac{\nu}{h}-1} \inf_{v \in \mathcal{P}_{r-1}(jh, (j+1)h]} \int_{jh}^{(j+1)h} \left[\frac{1}{h^{r-1}}x^r - v(x) \right]^2 dx \\ &= \frac{\kappa}{h^2} \frac{1}{h^{2(r-1)}} \sum_{j=0}^{\frac{\nu}{h}-1} \inf_{v \in \mathcal{P}_{r-1}(jh, (j+1)h]} \int_{jh}^{(j+1)h} [x^r - v(x)]^2 dx \\ &\stackrel{t=(x-jh)/h}{=} \frac{\kappa}{h^2} \frac{1}{h^{2(r-1)}} \sum_{j=0}^{\frac{\nu}{h}-1} \inf_{v \in \mathcal{P}_{r-1}(jh, (j+1)h]} h \int_0^1 [(ht+jh)^r - v(ht+jh)]^2 dt \\ &= \frac{\kappa}{h^2} \frac{1}{h^{2(r-1)}} h^{2r+1} \sum_{j=0}^{\frac{\nu}{h}-1} \underbrace{\inf_{v \in \mathcal{P}_{r-1}[0,1]} \int_0^1 [t^r - v(t)]^2 dt}_{\geq c_0 > 0} \end{aligned}$$

$$\geq c_1 h \frac{\nu}{h} = c_1 \nu > 0,$$

d.h., letztlich haben wir den Fehler wieder wie in Kapitel 4.2.3 abgeschätzt. Ist $\nu > 1/2$, so ergibt sich analog mit (5.32) (vgl. (5.34)) $T_{n,\nu} \tilde{g}_n \geq c(1 - \nu)$, so daß (5.29) bewiesen ist. ■

Es stellt sich die Frage, ob der Beweis nicht auch eine Schärfeaussage für alle $\nu \in \{j/2^n : 1 \leq j < 2^n\}$ statt nur für $\nu \in \{j/2^n : 1 \leq j < 2^n\} \cap (\delta_0, 1 - \delta_0)$ liefert. Bei unserer Konstruktion muß aber ε unabhängig von n und ν gewählt werden, da die Resonanzelemente von ε abhängen. Ohne die Einschränkung $\nu \in (\delta_0, 1 - \delta_0)$ bekommt man Probleme beim Nachweis der Resonanzbedingung:

$$\begin{aligned} T_{n,\nu} g_{n,\varepsilon} &\stackrel{(5.27)}{\geq} T_{n,\nu} \tilde{g}_n - C \sqrt{\nu(1-\nu)} \sqrt{\varepsilon} \\ &\stackrel{(5.29)}{\geq} c \min\{\nu, 1-\nu\} - C \sqrt{\nu(1-\nu)} \sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Aber bei festem ε ist für $0 < \nu < \min\{\frac{1}{2}, (\frac{C\sqrt{\varepsilon}}{c\sqrt{2}})^2\}$

$$c \min\{\nu, 1-\nu\} - C \sqrt{\nu(1-\nu)} \sqrt{\varepsilon} \stackrel{1-\nu > 1/2}{<} c\nu - \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \sqrt{\nu} = \sqrt{\nu} \left[c\sqrt{\nu} - \frac{C\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2}} \right] < 0,$$

so daß wir auf diese Weise nicht erhalten, daß $T_{n,\nu} g_{n,\varepsilon} \geq c > 0$.

5.2 Superkonvergenz in inneren Punkten der Zerlegung

Nicht nur in den Knoten der Zerlegung, sondern auch in $r-1$ Punkten ($r \in \mathbb{N}$, vgl. (5.3)) im Inneren jedes Zerlegungsintervalls läßt sich eine höhere Konvergenzordnung für den Fehler $u - u_h$ bezüglich der Aufgaben (5.1) und (5.2) beweisen. Außerdem verhält sich $u' - u'_h$ sogar in r Punkten günstiger als in der $\|\cdot\|_{1,\infty,(0,1)}$ -Norm. Allerdings beträgt hier die Verbesserung jeweils nur bis zu eine Ordnung. Genauer gilt für jede der r Nullstellen (Gauß-Punkte) x_0 des auf ein Zerlegungsintervall transformierten Legendre-Polynoms ($u \in C_0[0, 1] \cap C^1[0, 1]$)

$$|u'(x_0) - u'_h(x_0)| \leq C \left[\omega_{r+1}^{(1)}(h, u, C[0, 1]) + h^{r+1} \|u\|_{C[0,1]} \right]$$

und für die $r-1$ Nullstellen (Lobatto-Punkte) x_0 der Ableitung dieses Polynoms:

$$|u(x_0) - u_h(x_0)| \leq C \left[h \omega_{r+1}^{(1)}(h, u, C[0, 1]) + h^{r+2} \|u\|_{C[0,1]} \right]$$

(siehe Satz 5.12). Zum Vergleich sei einerseits auf die globale Fehlerschranke (5.4) hingewiesen. Andererseits gilt für die Ableitung des Fehlers (vgl. mit Folgerung 3.28) die unten bewiesene Abschätzung ($a(x), b(x) \in W^{1,2}(0, 1)$)

$$\|u - u_h\|_{1,\infty,(0,1)} \leq C \left[\omega_r^{(1)}(h, u, C[0, 1]) + h^r \|u\|_{C[0,1]} \right]. \quad (5.35)$$

Auf die Superkonvergenz in den Gauß- und Lobatto-Punkten wurde u.a. von Lesaint und Zlámal in [65] aufmerksam gemacht. Für Differentialgleichungen der (für $j > 1$ höheren) Ordnung $k = 2j$, $j \in \mathbb{N}$, wird in [5] darüber hinaus gezeigt, daß der Fehler $u - u_h$ dann $r + 1 - k$ Superkonvergenzpunkte im Inneren jedes Zerlegungsintervalls besitzt. Wir beschränken uns aber auf den Fall $k = 2$. Zum Beweis der für die direkten Abschätzungen (Satz 5.12) entscheidenden Jackson-Typ-Ungleichung (Lemma 5.10) folgen wir der Darstellung in [94, S.8f] (vgl. [93, S.383f]) und erhalten damit auch einen Ansatz zum Beweis der Schärfe.

Es bleibt noch der Beweis zu (5.35) nachzutragen. Dazu zeigen wir zunächst die Ungleichung ($0 \leq j \leq r$)

$$\|u - P_h u\|_{1,\infty,(0,1)} \leq Ch^j \|u\|_{j+1,[0,1]}, \quad u \in C_0[0,1] \cap C^{j+1}[0,1], \quad (5.36)$$

die mittels der inversen Ungleichung (4.4) aus (5.5) folgt:

$$\begin{aligned} & \|u - P_h u\|_{1,\infty,(0,1)} \\ & \leq \|u - \Pi_{h,r} u\|_{1,\infty,(0,1)} + \|\Pi_{h,r} u - P_h u\|_{1,\infty,(0,1)} \\ & \stackrel{(4.4)}{\leq} \|u - \Pi_{h,r} u\|_{1,\infty,(0,1)} + \frac{1}{h} \|\Pi_{h,r} u - P_h u\|_{C[0,1]} \\ & \leq \|u - \Pi_{h,r} u\|_{1,\infty,(0,1)} + \frac{1}{h} \|\Pi_{h,r} u - u\|_{C[0,1]} + \frac{1}{h} \|u - P_h u\|_{C[0,1]} \\ & \stackrel{(3.62),(5.5)}{\leq} C \left[h^j |u|_{j+1,[0,1]} + \frac{1}{h} h^{j+1} |u|_{j+1,[0,1]} + \frac{1}{h} h^{j+1} \|u\|_{j+1,[0,1]} \right]. \end{aligned}$$

(5.36) ist für $j = 0$ eine Stabilitäts- und für $j = r$ eine Jackson-Typ-Ungleichung, so daß wir mit Folgerung 2.21 für $u \in C_0[0,1] \cap C^1[0,1]$ erhalten (vgl. (2.16)):

$$\begin{aligned} & \|u - P_h u\|_{1,\infty,(0,1)} \\ & \leq C_1 K(h^r, u, (C_0[0,1] \cap C^1[0,1], \|\cdot\|_{1,[0,1]}), (C_0[0,1] \cap C^{r+1}[0,1], \|\cdot\|_{r+1,[0,1]})) \\ & \leq C_2 [\omega_r^{(1)}(h, u, C[0,1]) + h^r \|u\|_{C[0,1]}]. \end{aligned}$$

■

Zunächst fassen wir einige Eigenschaften der **Legendre-Polynome** zusammen, die als Glieder $L_k \in \mathcal{P}_k$ der über

$$(L_{k_1}, L_{k_2})_{L^2(-1,1)} = \begin{cases} 0 & \text{für } k_1 \neq k_2 \\ \frac{2}{2k_1+1} & \text{für } k_1 = k_2 \end{cases}$$

eindeutig festgelegten Orthogonalfolge $(L_k)_{k=0}^\infty$ definiert sind.

Lemma 5.9 Sei $k \in \mathbb{N}_0$.

a) Die Legendre-Polynome erfüllen die Differentialgleichung

$$(1 - x^2)L_k''(x) - 2xL_k'(x) + k(k+1)L_k(x) = 0.$$

b) Das Polynom L_k hat genau k einfache Nullstellen in $(-1, 1)$, L_k' hat genau $k - 1$ einfache Nullstellen in $(-1, 1)$, falls $k > 0$ ist.

c) Benachbarte Polynome L_k und L_{k+1} haben keine gemeinsamen Nullstellen, ebenso haben L_k' und L_{k+1}' keine gemeinsamen Nullstellen.

Zum Beweis siehe [90], und zwar für a) [90, S.60, (4.2.1)], für b) [90, S.44, Theorem 3.3.1] (die Aussage für die Ableitung folgt dann sofort mit dem Satz von Rolle) und für c) [90, S.45, (3.3.6)].

Weiter sei $L_{k,j,h}$ das auf das Zerlegungsintervall $[jh, (j+1)h]$ transformierte Polynom L_k , also

$$L_{k,j,h}(x) := L_k \left(\frac{2(x - (j + 1/2)h)}{h} \right).$$

Für diese Polynome gelten natürlich auch die Eigenschaften aus Lemma 5.9, insbesondere ist

$$(L_{k_1,j,h}, L_{k_2,j,h})_{L^2(jh,(j+1)h)} = \frac{h}{2} (L_{k_1}, L_{k_2})_{L^2(-1,1)} = \begin{cases} 0 & \text{für } k_1 \neq k_2 \\ \frac{h}{2k_1+1} & \text{für } k_1 = k_2, \end{cases} \quad (5.37)$$

und aus Lemma 5.9a) folgt

$$-[(1 - \cdot^2)L_k'(\cdot)]'(x) = 2xL_k'(x) - (1 - x^2)L_k''(x) \stackrel{\text{Lemma 5.9a)}}{=} k(k+1)L_k(x),$$

so daß

$$\begin{aligned} k(k+1)L_{k,j,h}(x) &= k(k+1)L_k \left(\frac{2(x - (j + 1/2)h)}{h} \right) \\ &= -[(1 - \cdot^2)L_k'(\cdot)]' \left(\frac{2(x - (j + 1/2)h)}{h} \right) \\ &= -\frac{h}{2} \left[\left(1 - \left(\frac{2(\cdot - (j + 1/2)h)}{h} \right)^2 \right) L_k' \left(\frac{2(\cdot - (j + 1/2)h)}{h} \right) \right]'(x) \quad (5.38) \\ &= -\frac{h^2}{4} \left[\left(1 - \left(\frac{2(\cdot - (j + 1/2)h)}{h} \right)^2 \right) L_{k,j,h}' \right]'(x). \end{aligned}$$

Sei $\tilde{P}_h : W_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow V_h$ die über (vgl. (2.57))

$$([\tilde{P}_h u]', v')_{L^2(0,1)} = (u', v')_{L^2(0,1)} \quad \forall v \in V_h$$

definierte Ritz-Projektion zu $u \in W_0^{1,2}(0,1)$, d.h., \tilde{P}_h ist der Lösungsoperator zur elementaren Bilinearform $(d/dx \cdot, d/dx \cdot)_{L^2(0,1)}$, während P_h zu $a(\cdot, \cdot)$ gehört. Die Projektionen P_h und \tilde{P}_h stimmen überein, falls $a(x) \equiv 1$ und $b(x) \equiv 0$. Sowohl für die direkten Abschätzungen wie auch für die Schärfeuntersuchung lassen sich alle auftretenden Phänomene bereits am Beispiel dieser einfachsten Setzung darstellen. Die Fehlerabschätzung für allgemeine Koeffizienten $a(x)$ und $b(x)$ läßt sich sogar auf diesen Spezialfall zurückführen, so daß wir statt mit P_h mit \tilde{P}_h rechnen können. Dazu zitieren wir unter der Zusatzbedingung $a(x) \in W^{r+1,\infty}(0,1)$ aus [94, Kapitel 1.3] für $u \in C_0[0,1] \cap C^{r+1}[0,1]$ die Abschätzungen:

$$\|P_h u - \tilde{P}_h u\|_{C[0,1]} \leq Ch^{r+2} \|u\|_{r+1,[0,1]} \text{ für } r \geq 2, \quad (5.39)$$

$$\|P_h u - \tilde{P}_h u\|_{1,\infty,(0,1)} \leq Ch^{r+1} \|u\|_{r+1,[0,1]} \text{ für } r \in \mathbb{N}. \quad (5.40)$$

Dabei spielt die Einschränkung $r \geq 2$ keine weitere Rolle, da es für $r = 1$ keine Nullstellen von L'_r gibt und wir diesen Fall daher nicht betrachten werden.

Für den Fehler $u - \tilde{P}_h u$ gilt jetzt die folgende Jackson-Typ-Ungleichung, die sich ähnlich wie Fehlerabschätzungen bei der Gauß-Quadratur ergibt.

Lemma 5.10 (vgl. [94, S.9]) *Sei $u \in C_0[0,1] \cap C^{r+2}[0,1]$. Dann existiert eine Konstante C , so daß für jede Nullstelle x_0 der Ableitung des auf ein Teilintervall $[jh, (j+1)h]$ transformierten Legendre-Polynoms L_r , also für jede Nullstelle von $L'_{r,j,h}$, $0 \leq j < n$, gilt:*

$$|u(x_0) - \tilde{P}_h u(x_0)| \leq Ch^{r+2} |u|_{r+2,[0,1]}. \quad (5.41)$$

Außerdem gilt für die Nullstellen x_0 der Polynome $L_{r,j,h}$, $0 \leq j < n$:

$$|u'(x_0) - [\tilde{P}_h u]'(x_0)| \leq Ch^{r+1} |u|_{r+2,[0,1]}. \quad (5.42)$$

Dabei ist C hier, wie auch in den folgenden Sätzen, jeweils von u , j , h und x_0 unabhängig.

Beweis Sei wieder $e(x) := u(x) - \tilde{P}_h u(x)$. Da $a(x) \equiv 1$ und e nach (5.3) stückweise stetig differenzierbar ist, gilt auch hier die Gleichung (5.14):

$$(ae', 1)_{L^2(0,1)} = \int_0^1 e'(x) dx = e(1) - e(0) = 0,$$

so daß wir Lemma 5.8 anwenden können:

$$(e', z)_{L^2(0,1)} = 0 \quad \forall z \in \mathcal{P}_{r-1,h}. \quad (5.43)$$

Wir betrachten jetzt speziell das Zerlegungsintervall $I := (jh, (j+1)h]$. Wählt man $z \in \mathcal{P}_{r-1,h}$ so, daß $z \equiv 0$ außerhalb von I , dann folgt aus (5.43):

$$(e', z)_{L^2(I)} = 0 \quad \forall z \in \mathcal{P}_{r-1}(I). \quad (5.44)$$

Sei nun $x \in I$. Taylor-Entwicklung um den Punkt $(j + 1/2)h$ führt zu der Darstellung

$$e'(x) = \sum_{l=0}^r \frac{(x - (j + 1/2)h)^l}{l!} e^{(l+1)}((j + 1/2)h) + \frac{1}{r!} \int_{(j+1/2)h}^x e^{(r+2)}(t)(x-t)^r dt.$$

Auf $(jh, (j + 1)h]$ ist $\tilde{P}_h u \in \mathcal{P}_r$ und damit $e^{(r+2)}(t) = u^{(r+2)}(t)$. Eine Entwicklung in Legendre-Polynome liefert

$$e'(x) = \sum_{l=0}^r c_l L_{l,j,h}(x) + R(x) \quad (5.45)$$

mit geeigneten Koeffizienten $c_l = c_l(u)$ und

$$R(x) := \frac{1}{r!} \int_{(j+1/2)h}^x u^{(r+2)}(t)(x-t)^r dt.$$

Da $x \in (jh, (j + 1)h]$, ist $|x - t| \leq |x - (j + 1/2)h| \leq h/2$, und wir erhalten

$$|R(x)| \leq \frac{h^{r+1}}{r!} \|u^{(r+2)}\|_{C[0,1]}. \quad (5.46)$$

Setzen wir (5.45) in (5.44) ein und wählen $z = L_{l,j,h}$, so folgt für $0 \leq l \leq r - 1$:

$$0 = (e', L_{l,j,h})_{L^2(I)} \stackrel{(5.37)}{=} c_l (L_{l,j,h}, L_{l,j,h})_{L^2(I)} + (R, L_{l,j,h})_{L^2(I)}.$$

$$\begin{aligned} |c_l| &= \left| \frac{(R, L_{l,j,h})_{L^2(I)}}{(L_{l,j,h}, L_{l,j,h})_{L^2(I)}} \right| \stackrel{(5.37), (5.46)}{\leq} \frac{h^{r+1}}{r!} |u|_{r+2, [0,1]} \frac{2l+1}{h} \int_I |L_{l,j,h}(t)| dt \\ &\leq \frac{h^{r+2}(2l+1)}{h r!} |u|_{r+2, [0,1]} \|L_l\|_{C[-1,1]} = C_{r,l} h^{r+1} |u|_{r+2, [0,1]}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Ist x_0 jetzt speziell eine Nullstelle von $L_{r,j,h}$, so gilt

$$|e'(x_0)| \stackrel{(5.45), (5.46), (5.47)}{\leq} \left(\sum_{l=0}^{r-1} C_{r,l} \|L_l\|_{C[-1,1]} + 0 + \frac{1}{r!} \right) h^{r+1} |u|_{r+2, [0,1]}.$$

Damit ist die Jackson-Typ-Ungleichung (5.42) für die Ableitung des Fehlers bewiesen. Nun zum Fehler selbst. Nach (5.12) ist $e(jh) = 0$ (beachte $1/a(x) \equiv 1$, $b(x) \equiv 0$), so daß $(x \in I, \text{ d.h. } 0 < x - jh \leq h)$

$$\begin{aligned} |e(x)| &= \left| e(jh) + \int_{jh}^x e'(t) dt \right| \stackrel{(5.12), (5.45)}{=} \left| \int_{jh}^x \left[\sum_{l=0}^r c_l L_{l,j,h}(t) + R(t) \right] dt \right| \quad (5.48) \\ &\stackrel{(5.46)}{\leq} \sum_{l=0}^{r-1} h |c_l| \|L_l\|_{C[-1,1]} + \left| \int_{jh}^x c_r L_{r,j,h}(t) dt \right| + h \frac{h^{r+1}}{r!} |u|_{r+2, [0,1]} \\ &\stackrel{(5.47)}{\leq} C_r h^{r+2} |u|_{r+2, [0,1]} + \left| \int_{jh}^x c_r L_{r,j,h}(t) dt \right|. \end{aligned}$$

Ist x_0 eine Nullstelle von $L'_{r,j,h}$, so fällt der letzte Term weg, denn:

$$\begin{aligned}
& \int_{jh}^{x_0} c_r L_{r,j,h}(t) dt \\
& \stackrel{(5.38)}{=} - \int_{jh}^{x_0} \frac{c_r h}{2r(r+1)} \left[\underbrace{\left(1 - \left(\frac{2(\cdot - (j+1/2)h)}{h} \right)^2 \right)}_{=0 \text{ für } \cdot = jh} L'_r \left(\frac{2(\cdot - (j+1/2)h)}{h} \right) \right]'(t) dt \\
& = - \frac{c_r h}{2r(r+1)} \left[\left(1 - \left(\frac{2(x_0 - (j+1/2)h)}{h} \right)^2 \right) L'_r \left(\frac{2(x_0 - (j+1/2)h)}{h} \right) - 0 \right] \\
& = - \frac{c_r h^2}{4r(r+1)} \left(1 - \left(\frac{2(x_0 - (j+1/2)h)}{h} \right)^2 \right) L'_{r,j,h}(x_0) = 0.
\end{aligned}$$

■

Zusammen mit (5.39) bzw. (5.40) erhalten wir daraus auch eine Jackson-Typ-Ungleichung für den Fehler $u - P_h u$ in den Superkonvergenzpunkten:

Folgerung 5.11 (siehe [94, S.9]) Seien $\kappa < a(x) \in W^{r+1,\infty}(0,1)$, $0 \leq b(x) \in L^\infty(0,1)$ und $u \in C_0[0,1] \cap C^{r+2}[0,1]$. Dann gilt für jede Nullstelle x_0 von $L'_{r,j,h}$, $0 \leq j < n$:

$$|u(x_0) - P_h u(x_0)| \leq Ch^{r+2} \|u\|_{r+2,[0,1]}.$$

Außerdem gilt für die Nullstellen x_0 der Polynome $L_{r,j,h}$:

$$|u'(x_0) - [P_h u]'(x_0)| \leq Ch^{r+1} \|u\|_{r+2,[0,1]}.$$

Beweis Wir betrachten nur die erste Abschätzung, die zweite ergibt sich analog aus (5.42) und (5.40).

$$\begin{aligned}
|(u - P_h u)(x_0)| & \leq |(u - \tilde{P}_h u)(x_0)| + |(\tilde{P}_h u - P_h u)(x_0)| \\
& \stackrel{(5.41),(5.39)}{\leq} C [h^{r+2} |u|_{r+2,[0,1]} + h^{r+2} \|u\|_{r+1,[0,1]}].
\end{aligned}$$

■

Nach (5.5) und (5.36) gilt für $u \in C_0[0,1] \cap C^1[0,1]$ (mit $a(x), b(x) \in W^{1,2}(0,1)$)

$$\begin{aligned}
\|u - P_h u\|_{C[0,1]} & \leq Ch \|u\|_{1,[0,1]} \\
\|u - P_h u\|_{1,\infty,(0,1)} & \leq C \|u\|_{1,[0,1]},
\end{aligned}$$

so daß mit Folgerung 5.11 für die Nullstellen x_0 von $L'_{r,j,h}$ gilt (vgl. (2.16))

$$\begin{aligned}
& |u(x_0) - P_h u(x_0)| \\
& \leq ChK(h^{r+1}, u, (C_0[0,1] \cap C^1[0,1], \|\cdot\|_{1,[0,1]}), (C_0[0,1] \cap C^{r+2}[0,1], \|\cdot\|_{r+2,[0,1]})),
\end{aligned}$$

und für die Nullstellen von $L_{r,j,h}$ ist

$$\begin{aligned} & |u'(x_0) - [P_h u]'(x_0)| \\ & \leq CK(h^{r+1}, u, (C_0[0, 1] \cap C^1[0, 1], \|\cdot\|_{1,[0,1]}), (C_0[0, 1] \cap C^{r+2}[0, 1], \|\cdot\|_{r+2,[0,1]})). \end{aligned}$$

Wenden wir jetzt noch Folgerung 2.21 an, so haben wir bewiesen:

Satz 5.12 *Seien $\kappa < a(x) \in W^{r+1,\infty}(0, 1)$, $0 \leq b(x) \in W^{1,2}(0, 1)$ und $u \in C_0[0, 1] \cap C^1[0, 1] \subset W_0^{1,2}(0, 1)$. Dann gilt für jede Nullstelle x_0 von $L'_{r,j,h}$, $0 \leq j < n$:*

$$|u(x_0) - P_h u(x_0)| \leq C \left[h\omega_{r+1}^{(1)}(h, u, C[0, 1]) + h^{r+2}\|u\|_{C[0,1]} \right].$$

Außerdem gilt für die Nullstellen x_0 der Polynome $L_{r,j,h}$:

$$|u'(x_0) - [P_h u]'(x_0)| \leq C \left[\omega_{r+1}^{(1)}(h, u, C[0, 1]) + h^{r+1}\|u\|_{C[0,1]} \right].$$

Ist u insbesondere Lösung einer Aufgabe (5.1), so ist $u \in W^{2,2}(0, 1) \subset C^1[0, 1]$ (vgl. Satz 3.1) und $u_h = P_h u$, so daß der Satz die gewünschten Fehlerschranken für $u - u_h$ angibt.

Diese Abschätzungen sind sogar für die einfachste Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$, d.h. $P_h = \tilde{P}_h$, scharf im folgenden Sinne:

Satz 5.13 *Seien $a(x) \equiv 1$ und $b(x) \equiv 0$. Zu jedem abstrakten Stetigkeitsmodul ω mit $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$ und jeder Folge von Zerlegungsintervallen $(I_n)_{n=1}^\infty$, $I_n = [jh, (j+1)h] \in \mathcal{T}_h$ (mit $j = j(h)$, $h = 1/n$) existiert ein Gegenbeispiel $u_\omega = u_{\omega, (I_n)} \in C_0[0, 1] \cap C^1[0, 1]$, so daß $(\delta \rightarrow 0+, h \rightarrow 0+)$*

$$\omega_{r+1}^{(1)}(\delta, u_\omega, C[0, 1]) = \mathcal{O}(\omega(\delta^{r+1})),$$

aber für jedes $1 \leq l \leq r-1$

$$|(u_\omega - P_h u_\omega)(x'_{l,n})| \neq o(h\omega(h^{r+1}))$$

und für jedes $1 \leq l \leq r$

$$|(u_\omega - P_h u_\omega)'(x_{l,n})| \neq o(\omega(h^{r+1})).$$

Dabei sind $x'_{1,n}, \dots, x'_{r-1,n}$ die (geordneten) Nullstellen der Ableitung des auf I_n transformierten Legendre-Polynoms $L_{r,j,h}$, und $x_{1,n}, \dots, x_{r,n}$ sind die Nullstellen des Polynoms $L_{r,j,h}$ selbst.

Das Gegenbeispiel läßt sich auch so wählen, daß $u_\omega \in C_0[0, 1] \cap C^2[0, 1]$ und

$$\omega_r^{(2)}(\delta, u_\omega, C[0, 1]) = \mathcal{O}(\omega(\delta^r)),$$

aber für jedes $1 \leq l \leq r-1$

$$|(u_\omega - (u_\omega)_h)(x'_{l,n})| \neq o(h^2\omega(h^r))$$

und für jedes $1 \leq l \leq r$

$$|(u_\omega - (u_\omega)_h)'(x_{l,n})| \neq o(h\omega(h^r)).$$

In diesem Fall ist u_ω sicher Lösung einer Aufgabe (5.1), da vermöge partieller Integration eine entsprechende Inhomogenität $f = f_\omega$ existiert (vgl. Lemma 4.13). Außerdem ist wegen $\omega_{r+1}^{(1)}(h, u, C[0, 1]) \leq Ch\omega_r^{(2)}(h, u, C[0, 1])$ auch dies ein Beitrag zur Schärfe von Satz 5.12.

Beweis Wir benutzen wieder Satz 2.31 (wobei jetzt alle Folgen bei $n = 12$ statt bei $n = 1$ beginnen), und zu $h = 1/n$ setzen wir

$$X = C_0[0, 1] \cap C^1[0, 1], \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{1, \bar{\Omega}}, \quad \varphi_n = \frac{1}{n^{r+1}} = h^{r+1}, \quad \sigma(\delta) = \delta^{r+1},$$

$$S_\delta u = \omega_{r+1}^{(1)}(\delta, u, C[0, 1]), \quad \mathbb{B} = \mathbb{B}_n = \{1, 2, \dots, 2r - 1\},$$

$$T_{n,\nu} u := \begin{cases} |(u - P_h u)'(x_{\nu,n})| & \text{für } 1 \leq \nu \leq r \\ n|(u - P_h u)(x'_{\nu-r,n})| = h^{-1}|(u - P_h u)(x'_{\nu-r,n})| & \text{für } r+1 \leq \nu \leq 2r-1. \end{cases}$$

Wir legen jetzt die Resonanzelemente fest. Dazu sei zunächst $(\tilde{g}_n)_{n=12}^\infty$ eine Funktionenfolge mit $\tilde{g}_n|_{I_n} = L_{r+1,j,h}$, $\int_0^1 \tilde{g}_n(x) dx = 0$ und $|\tilde{g}_n|_{k,[0,1]} \leq Cn^k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Diese läßt sich z.B. mit der Funktion φ_ε , $\varepsilon < 1/2$, aus (5.18) wie folgt definieren:

- für $x \in [jh, (j+1)h]$:

$$\tilde{g}_n(x) := L_{r+1,j,h}(x);$$

- für $x \in [(j-1)h, jh]$ (falls $j > 0$):

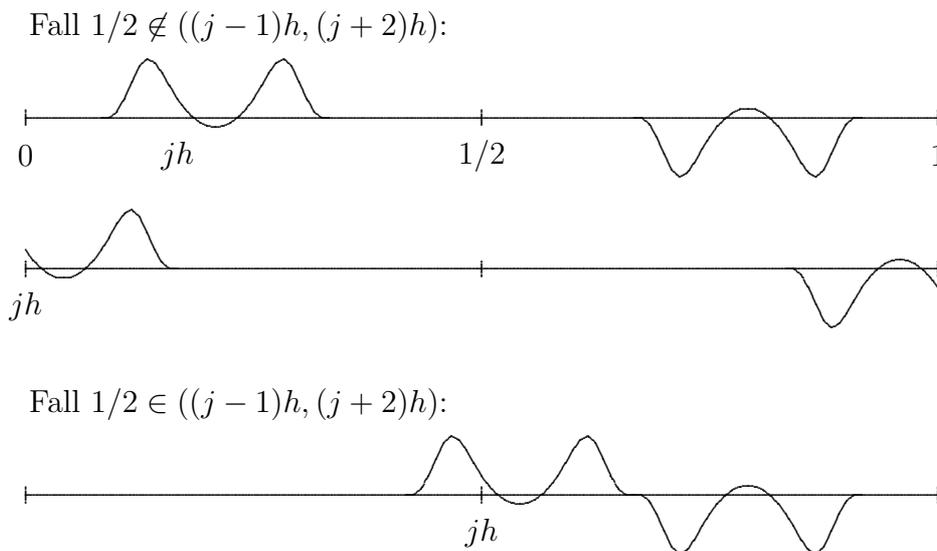
$$\tilde{g}_n(x) := \left(1 - \varphi_\varepsilon\left(\frac{x - (j-1)h}{h}\right)\right) L_{r+1,j,h}(x);$$

- für $x \in [(j+1)h, (j+2)h]$ (falls $j \leq n-2$):

$$\tilde{g}_n(x) := \varphi_\varepsilon\left(\frac{x - (j+1)h}{h}\right) L_{r+1,j,h}(x).$$

Um die Bedingung $\int_0^1 \tilde{g}_n(x) dx = 0$ zu erfüllen, sei außerdem

- $\tilde{g}_n(1-x) = -\tilde{g}_n(x)$ für $x \in [(j-1)h, (j+2)h] \cap [0, 1]$, falls die Funktion dadurch nicht doppelt definiert wird, also falls $1/2 \notin ((j-1)h, (j+2)h)$.
- $\tilde{g}_n(3h+x) = -\tilde{g}_n(x)$ für $x \in [(j-1)h, (j+2)h]$, falls $1/2 \in ((j-1)h, (j+2)h)$. In dieser Situation ist $(j-1)h < 1/2$, also $jh < 1/2 + h$. Wegen $n \geq 12$ ist dann $3h + (j+2)h < 1/2 + 6h = 1/2 + 6/n \leq 1$, und das Intervall $[3h + (j-1)h, 3h + (j+2)h]$ liegt in $[0, 1]$.

Abbildung 5.4: Konstruktion der Funktion \tilde{g}_n , $n = 12$

Schließlich sei \tilde{g}_n auf $[0, 1]$ durch 0 fortgesetzt. Da

$$|L_{r+1, j, h}|_{k, [(j-1)h, (j+2)h]} = (2/h)^k |L_{r+1}|_{k, [-3, 3]} = Ch^{-k}$$

und $\left| \varphi_\varepsilon \left(\frac{x - (j \pm 1)h}{h} \right) \right|_{k, [0, 1]} \leq Ch^{-k}$, folgt mit der Leibniz-Formel, daß auch $|\tilde{g}_n|_{k, [0, 1]} \leq Ch^{-k} = Cn^k$. Man beachte, daß die Konstruktion der Folge $(\tilde{g}_n)_{n=12}^\infty$ mittels der Funktion φ_ε die Differenzierbarkeit sichert (vgl. auch mit dem Beweis zu Satz 5.5).

Mit der so konstruierten Folge $(\tilde{g}_n)_{n=12}^\infty$ setzen wir

$$g_n(x) := \int_0^x \tilde{g}_n(t) dt,$$

so daß $g_n \in C_0[0, 1]$ beliebig oft differenzierbar ist mit $\|g_n\|_{1, [0, 1]} \leq C$ und $|g_n|_{k, [0, 1]} \leq Cn^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Daraus folgen wieder sofort die Bedingungen (2.32) und (2.33), denn:

$$\omega_{r+1}^{(1)}(\delta, g_n, C[0, 1]) \leq \begin{cases} C_1 \|g_n\|_{1, [0, 1]} \leq C_2 \\ C_3 \delta^{r+1} |g_n|_{r+2, [0, 1]} \leq C_4 \delta^{r+1} n^{r+1} = C_4 \frac{\sigma(\delta)}{\varphi_n}. \end{cases}$$

Mit Satz 5.12 ist auch (2.39) und damit (2.34) und (2.35) erfüllt:

$$\begin{aligned} T_{n, \nu} u &\leq \begin{cases} C[\omega_{r+1}^{(1)}(h, u, C[0, 1]) + h^{r+1} \|u\|_{C[0, 1]}] & \text{für } 1 \leq \nu \leq r \\ h^{-1} C[h\omega_{r+1}^{(1)}(h, u, C[0, 1]) + h^{r+2} \|u\|_{C[0, 1]}] & \text{für } r+1 \leq \nu \leq 2r-1 \end{cases} \\ &\leq C[S_{\sigma^{-1}(\varphi_n)} u + \varphi_n \|u\|_{1, \overline{\Omega}}], \end{aligned}$$

so daß wir uns der Resonanzbedingung (2.36) zuwenden müssen: Für $x \in I_n$ gilt, da hier $(P_h g_n)' \in \mathcal{P}_{r-1}(I_n)$:

$$e'_n(x) := (g_n - P_h g_n)'(x) = \tilde{g}_n(x) - (P_h g_n)'(x) = L_{r+1,j,h}(x) + \sum_{l=0}^{r-1} c_l L_{l,j,h}(x).$$

Da $a(x) \equiv 1$, ist wie im Beweis zu Lemma 5.10 (siehe (5.43), (5.44)) die Bedingung (5.14) erfüllt, und wir benutzen wieder Lemma 5.8, um für

$$z(x) = \begin{cases} L_{k,j,h}(x) & : x \in (jh, (j+1)h] \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

zu erhalten ($0 \leq k \leq r-1$, vgl. (5.47)):

$$0 = (e'_n, L_{k,j,h})_{L^2(I_n)} \stackrel{(5.37)}{=} \frac{h}{2k+1} c_k.$$

Also ist $c_k = 0$ und

$$e'_n(x) = L_{r+1,j,h}(x). \quad (5.49)$$

Die Punkte $x_{1,n}, \dots, x_{r,n}$ sind die Nullstellen von $L_{r,j,h}$. Dann sind $x_l := 2[x_{l,n} - (j+1/2)h]/h$, $1 \leq l \leq r$, die Nullstellen von L_r . Nach Lemma 5.9c) sind die Nullstellen von L_r und L_{r+1} verschieden, so daß $|L_{r+1,j,h}(x_{l,n})| = |L_{r+1}(x_l)| \geq c > 0$ für $1 \leq l \leq r$, unabhängig von n . Für $1 \leq \nu \leq r$ gilt demnach mit (5.49):

$$T_{n,\nu} g_n = |e'_n(x_{\nu,n})| = |L_{r+1,j,h}(x_{\nu,n})| \geq c > 0 \quad \forall n \geq 12.$$

Weiterhin haben wir mit (5.12), daß $e_n(j/n) = e_n(jh) = 0$ und für $x \in I_n$ (vgl. (5.48)):

$$\begin{aligned} e_n(x) &= \int_{jh}^x e'_n(t) dt \stackrel{(5.49)}{=} \int_{jh}^x L_{r+1,j,h}(t) dt \\ &\stackrel{(5.38)}{=} -\frac{h}{2(r+1)(r+2)} \left(1 - \left(\frac{2(x - (j+1/2)h)}{h} \right)^2 \right) L'_{r+1} \left(\frac{2(x - (j+1/2)h)}{h} \right). \end{aligned}$$

Die $x'_{1,n}, \dots, x'_{r-1,n}$ sind die Nullstellen von $L'_{r,j,h}$. Dann sind $x'_l := 2(x'_{l,n} - (j+1/2)h)/h$, $1 \leq l \leq r-1$, die Nullstellen von L'_r . Wir haben also

$$e_n(x'_{l,n}) = -\frac{h}{2(r+1)(r+2)} (1 - (x'_l)^2) L'_{r+1}(x'_l).$$

Nach Lemma 5.9c) sind auch die Nullstellen von L'_r und L'_{r+1} verschieden, so daß $|L'_{r+1}(x'_l)| \geq c_0 > 0$, $1 \leq l \leq r-1$, unabhängig von n . Nach Lemma 5.9b) ist $x'_l \in (-1, 1)$, so daß auch $1 - (x'_l)^2 \geq c_1 > 0$. Damit ist $|e_n(x'_{l,n})| \geq ch = \frac{c}{n} > 0$ für $1 \leq l \leq r-1$, und es folgt die restliche Resonanzbedingung für $r+1 \leq \nu \leq 2r-1$:

$$T_{n,\nu} g_n = |n e_n(x'_{\nu-r,n})| \geq c > 0 \quad \forall n \geq 12.$$

Der Beweis des Zusatzes erfolgt genauso mit den Setzungen

$$X = C_0[0, 1] \cap C^2[0, 1], \quad \varphi_n = \frac{1}{n^r} = h^r, \quad \sigma(\delta) = \delta^r, \quad S_\delta u = \omega_r^{(2)}(\delta, u, C[0, 1]).$$

Die Fehlerfunktionale $T_{n,\nu}$ und die Resonanzelemente g_n stimmen bis auf einen Vorfaktor n bzw. $1/n$ mit den oben gewählten überein. \blacksquare

Anhang A

Beweis des Äquivalenzsatzes

Wir benutzen im folgenden die Abkürzungen ($s \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} K(\delta, f, s, r + s; L^p(\Omega)) &:= K(\delta, (W^{s,p}(\Omega), |\cdot|_{s,p,\Omega}), (W^{r+s,p}(\Omega), |\cdot|_{r+s,p,\Omega})), \\ K(\delta, f, s, r + s; C(\overline{\Omega})) &:= K(\delta, (C^s(\overline{\Omega}), |\cdot|_{s,\overline{\Omega}}), (C^{r+s}(\overline{\Omega}), |\cdot|_{r+s,\overline{\Omega}})), \\ \overline{K}(\delta, f, s, r + s; L^p(\Omega)) &:= K(\delta, (W^{s,p}(\Omega), \|\cdot\|_{s,p,\Omega}), (W^{r+s,p}(\Omega), |\cdot|_{r+s,p,\Omega})), \\ \overline{K}(\delta, f, s, r + s; C(\overline{\Omega})) &:= K(\delta, (C^s(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{s,\overline{\Omega}}), (C^{r+s}(\overline{\Omega}), |\cdot|_{r+s,\overline{\Omega}})). \end{aligned}$$

Mit diesen Notationen schreibt sich Satz 2.19 wie folgt:

Satz A.1 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes LG-Gebiet und $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p < \infty$. Dann existieren Konstanten $0 < c, C < \infty$, so daß für alle $0 < \delta \leq 1$ gilt:*

$$\begin{aligned} c\omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) &\leq K(\delta^r, f, s, r + s; L^p(\Omega)) \\ &\leq \overline{K}(\delta^r, f, s, r + s; L^p(\Omega)) \leq C\omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) \quad \forall f \in W^{s,p}(\Omega), \\ c\omega_r^{(s)}(\delta, f, C(\overline{\Omega})) &\leq K(\delta^r, f, s, r + s; C(\overline{\Omega})) \\ &\leq \overline{K}(\delta^r, f, s, r + s; C(\overline{\Omega})) \leq C\omega_r^{(s)}(\delta, f, C(\overline{\Omega})) \quad \forall f \in C^s(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Dabei sind die Konstanten c und C von f und δ unabhängig.

Der Beweis eines Äquivalenzsatzes zwischen K-Funktional und Stetigkeitsmodul für periodische Funktionen besteht im wesentlichen aus einem Glätten mit Steklov-Mitteln oder vergleichbaren Operatoren (vgl. [17, S.258] und die dort angegebene Literatur, vgl. auch mit Kapitel A.2). Für nicht-periodische Funktionen auf beschränkten Definitionsbereichen kommt i.a. noch ein Fortsetzungsargument oder eine Teilung der Einheit hinzu. Im Eindimensionalen geht die Verwendung einer Teilung der Einheit auf Brudnyi [10, S.582] zurück. Satz A.1 wurde im Spezialfall $s = 0$ von Johnen und Scherer [59] gezeigt (vgl. auch [86]). Es ist jedoch nicht möglich, den für $s = 0$ formulierten Satz durch ein Zusatzargument auf beliebige $s \in \mathbb{N}_0$ auszudehnen, wie dies bei Büttgenbach [11, S.100] (vgl. [46, S.139–142]) in einer Dimension geschieht. Dort wird statt

f die Funktion $f^{(s)}$ in den für $s = 0$ gezeigten Satz eingesetzt und dann die Äquivalenz von K und \overline{K} -Funktional, wie sie hier entsprechend in Abschnitt A.4 formuliert wird, ausgenutzt. In höheren Dimensionen können dagegen die partiellen Ableitungen der Ordnung s nur nacheinander eingesetzt werden, was aber wegen der fehlenden Subadditivität des Infimums nicht weiterführt (vgl. [67, S.205]). Daher wird der Beweis aus [59] hier nochmals unter Berücksichtigung der zusätzlichen Ableitungen durchgeführt. Dabei dient die Arbeit von Lüttgens [67] als Vorbild, wo ein entsprechender Satz für gemischte sup-Norm-Moduln bewiesen wird. Beim Übergang zu Sobolev-Räumen müssen allerdings die dort benutzten Taylor-Entwicklungen durch funktionalanalytische Argumente ersetzt werden.

Es sei an dieser Stelle auch noch bemerkt, daß für einfache Gebiete (z.B. Rechtecke) der Beweis im Fall der Supremum-Norm auch ohne Fortsetzungsargument und ohne Teilung der Einheit nach einer Idee von Sendov (vgl. [43], [85, S.33]) aufgebaut werden kann. Dabei werden die in Paragraph A.2 benutzten Steklov-Mittel so modifiziert, daß keine Probleme mehr mit den Gebietsrändern entstehen. Allerdings eignet sich dieser Ansatz nicht für die L^p -Fälle, da das Inkrement der auftretenden Differenzen vom betrachteten Punkt abhängt. So sind dann höchstens Abschätzungen gegen einen τ -Modul möglich.

Der Beweis von Satz A.1 wird nun in den folgenden Abschnitten erbracht. Nach dem Beweis der jeweils linken Ungleichung - und das ist die einfachere - in Kapitel A.1 wird in Abschnitt A.2 zunächst das K -Funktional auf Teilgebieten gegen den Stetigkeitsmodul abgeschätzt. In Paragraph A.3 wird daraufhin mittels Teilung der Einheit gezeigt, daß sich das auf Ω definierte \overline{K} -Funktional durch eine Summe von \overline{K} -Funktionalen auf in Abschnitt A.2 betrachteten Teilgebieten majorisieren läßt. Da in Abschnitt A.2 aber nur K -Funktionale diskutiert werden, müssen die \overline{K} -Funktionale ihrerseits auf den Teilgebieten durch K -Funktionale abgeschätzt werden. Dies wird in Abschnitt A.4 mit dem Bramble-Hilbert-Lemma getan. Schließlich können in Paragraph A.5 alle Resultate zum Beweis des Satzes zusammengetragen werden.

A.1 Die ersten Ungleichungen

Lemma A.2 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine (beschränkte) offene Menge, $r \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{N}_0$, $1 \leq p < \infty$. Dann existiert eine Konstante $c > 0$, so daß für $\delta > 0$:*

$$\begin{aligned} c\omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) &\leq K(\delta^r, f, s, r+s; L^p(\Omega)) \\ &\leq \overline{K}(\delta^r, f, s, r+s; L^p(\Omega)) \quad \forall f \in W^{s,p}(\Omega), \\ c\omega_r^{(s)}(\delta, f, C(\overline{\Omega})) &\leq K(\delta^r, f, s, r+s; C(\overline{\Omega})) \\ &\leq \overline{K}(\delta^r, f, s, r+s; C(\overline{\Omega})) \quad \forall f \in C^s(\overline{\Omega}). \end{aligned}$$

Dabei ist c von f und δ unabhängig.

Beweis Das folgende Argument ist Standard im Umgang mit K-Funktionalen: Für $f \in W^{s,p}(\Omega)$ und $g \in W^{r+s,p}(\Omega)$ ist mit Lemma 2.16:

$$\begin{aligned} \omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) &\leq \omega_r^{(s)}(\delta, f - g, L^p(\Omega)) + \omega_r^{(s)}(\delta, g, L^p(\Omega)) \\ &\leq C(|f - g|_{s,p,\Omega} + \delta^r |g|_{r+s,p,\Omega}). \end{aligned}$$

Übergang zum Infimum bezüglich $g \in W^{r+s,p}(\Omega)$ liefert die Behauptung im L^p -Fall, da

$$K(\delta^r, f, s, r + s; L^p(\Omega)) \leq \overline{K}(\delta^r, f, s, r + s; L^p(\Omega)).$$

Die Abschätzung für $f \in C^s(\overline{\Omega})$ verläuft völlig analog. ■

A.2 Glätten mit Steklov-Mitteln

Zunächst zitieren wir eine Beziehung zwischen gemischten und radialen Differenzen. Die später im Beweis von Lemma A.4 benutzten Steklov-Mittel führen auf gemischte Differenzen. Das folgende Lemma stellt dann die Beziehung zu den verwendeten radialen Moduln her.

Lemma A.3 (*Kemperman-Identität, siehe [16], vgl. [59]*)

Sei $D^* := \{D : D \subset \{1, \dots, r\}\}$ und für $\nu \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ mit $|\alpha| = r$ und $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq \mu \leq r$, sei $(\alpha_0 := 0, 1 \leq i \leq m)$

$$\nu_{[\mu,\alpha]} := \nu_i e_i \text{ falls } \mu \in \left\{ \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j + 1, \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j + 2, \dots, \sum_{j=0}^i \alpha_j \right\}.$$

Dann gilt für jede Funktion f mit Definitionsbereich in \mathbb{R}^m und Werten in \mathbb{R} , die an den auftretenden Stellen erklärt ist:

$$\Delta_\nu^\alpha f(x) = \sum_{D \in D^*} (-1)^{r-|D|} \Delta_{\sum_{\mu \in D} \frac{\nu_{[\mu,\alpha]}}{\mu}}^r f \left(x + \sum_{\mu \notin D} \nu_{[\mu,\alpha]} \right).$$

Wir nutzen jetzt aus, daß Steklov-Mittel mit Ableitungen vertauschbar sind (vgl. [41, S.87]), um das folgende Lemma zu beweisen.

Lemma A.4 (*vgl. [59], [67, S.202]*) Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\Omega_1 \subset \Omega_2$, und es existiere ein Kegel $\text{cone}(\eta, \gamma, \rho)$, so daß $\Omega_1 + \text{cone}(\eta, \gamma, \rho) \subset \Omega_2$. Weiter seien $s \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine Konstante C , so daß für $0 < \delta \leq 1$

$$K(\delta^r, f, s, r + s; L^p(\Omega_1)) \leq C \omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega_2)), \quad (\text{A.1})$$

falls $1 \leq p < \infty$ und $f \in C^s(\Omega_2) \cap W^{s,p}(\Omega_2)$. Ist $f \in C^s(\overline{\Omega}_2)$, so gilt:

$$K(\delta^r, f, s, r + s; C(\overline{\Omega}_1)) \leq C \omega_r^{(s)}(\delta, f, C(\overline{\Omega}_2)). \quad (\text{A.2})$$

Dabei ist die Konstante C von f und δ unabhängig.

Beweis Der Beweis geschieht durch Glätten mit Steklov-Mitteln.

1. Fall: Der Kegel $\text{cone}(\eta, \gamma, \rho)$ enthalte die Menge

$$K_0 := \{x \in \mathbb{R}^m : 0 < |x| \leq r(\sqrt{m} + 1 + \log r), x_j \geq 0, 1 \leq j \leq m\}.$$

Für $0 \leq j \leq r$, $x \in \Omega_1$ und $\delta \leq 1$ definieren wir die Steklov-Mittel

$$F(\delta, f, x, j) := \int_0^1 \dots \int_0^1 f \left(x + \sum_{i=1}^m \frac{j\delta}{r} [v_{i,1} + \dots + v_{i,r}] e_i \right) dv_{1,1} dv_{1,2} \dots dv_{m,r}. \quad (\text{A.3})$$

Beachte, daß $F(\delta, f, x, j)$ wohldefiniert ist, da

$$\left| \sum_{i=1}^m \frac{j\delta}{r} [v_{i,1} + \dots + v_{i,r}] e_i \right| \leq j\delta |(1, 1, \dots, 1)| = j\delta \sqrt{m} \leq r\sqrt{m}$$

und damit alle Argumente von f in $x + \text{cone}(\eta, \gamma, \rho)$ liegen. Nun gilt ($x \in \Omega_1$, $|\alpha| \leq s$)

$$F(\delta, f, x, 0) = f(x) \quad (\text{A.4})$$

$$D^\alpha F(\delta, f, x, j) = F(\delta, f^{(\alpha)}, x, j), \quad (\text{A.5})$$

denn ($1 \leq n \leq m$, $\zeta := \sum_{i=1}^m \frac{j\delta}{r} [v_{i,1} + \dots + v_{i,r}] e_i$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_n} F(\delta, f, x, j) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^1 \dots \int_0^1 [f(x + te_n + \zeta) - f(x + \zeta)] dv_{1,1} \dots dv_{m,r} \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(x + te_n + \zeta) - f(x + \zeta)] dv_{1,1} \dots dv_{m,r} \\ &= F \left(\delta, \frac{\partial}{\partial x_n} f, x, j \right). \end{aligned}$$

Dabei ist die Integration mit der Grenzwertbildung vertauschbar: Da Ω_1 offen ist, existiert $\overline{S(\varepsilon, x)} \subset \Omega_1$. $\partial f / \partial x_n$ ist stetig auf Ω_2 (beachte $f \in C^s(\Omega_2)$) und damit insbesondere gleichmäßig stetig auf der kompakten Menge $\overline{S(\varepsilon, x)} + K_0 \subset \Omega_2$. Nach dem Mittelwertsatz konvergiert der Differenzenquotient damit als Funktion in $v_{1,1}, \dots, v_{m,r}$ für $t \rightarrow 0$ ($|t| < \varepsilon$) gleichmäßig auf $[0, 1]^{mr}$.

Schließlich folgt (A.5) durch Iteration. Weiter gilt für $|\alpha| \leq r$, $1 \leq j \leq r$, $x \in \Omega_1$

$$\begin{aligned} D^\alpha F(\delta, f, x, j) &= \left(\frac{r}{j\delta} \right)^{|\alpha|} \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{r-\alpha_1} \dots \underbrace{\int_0^1 \dots \int_0^1}_{r-\alpha_m} \left[\Delta_{\frac{j\delta}{r}}^\alpha f \right] \left(x_1 + \frac{j\delta}{r} [v_{1,1} + \dots + v_{1,r-\alpha_1}], \right. \\ &\quad \left. \dots, x_m + \frac{j\delta}{r} [v_{m,1} + \dots + v_{m,r-\alpha_m}] \right) dv_{1,1} \dots dv_{1,r-\alpha_1} dv_2 \dots dv_{m,r-\alpha_m}, \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

denn für $1 \leq n \leq m$ folgt mit der Substitution $w = x_n + \frac{j\delta}{r} v_{n,r}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_n} F(\delta, f, x, j) &= \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\frac{r}{j\delta} \int_{x_n}^{x_n + \frac{j\delta}{r}} \int_0^1 \dots \int_0^1 f \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^m \left(x_i + \frac{j\delta}{r} [v_{i,1} + \dots + v_{i,r}] \right) e_i \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(w + \frac{j\delta}{r} [v_{n,1} + \dots + v_{n,r-1}] \right) e_n \right) dv_{1,1} \dots dv_{n,r-1} dv_{n+1,1} \dots dv_{m,r} dw \right], \end{aligned}$$

so daß mit dem Fundamentalsatz die Gleichung (A.6) für $\alpha = e_n$ folgt. Für beliebiges α ergibt sich (A.6) wieder durch Iteration. Wir setzen jetzt

$$g(x) := g(\delta, f, x) := - \sum_{j=1}^r (-1)^j \binom{r}{j} F(\delta, f, x, j). \quad (\text{A.7})$$

Damit ist $g \in C^{r+s}(\Omega_1) \cap W^{r+s,p}(\Omega_1)$ für $f \in C^s(\Omega_2) \cap W^{s,p}(\Omega_2)$ und $g \in C^{r+s}(\overline{\Omega}_1)$ für $f \in C^s(\overline{\Omega}_2)$. Im folgenden beschränken wir uns schreibtechnisch auf die L^p -Räume. Mit der Funktion g wird das K -Funktional nach oben abgeschätzt, also

$$K(\delta^r, f, s, r+s; L^p(\Omega_1)) \leq |f - g|_{s,p,\Omega_1} + \delta^r |g|_{r+s,p,\Omega_1}.$$

Dabei sind jetzt nur noch die beiden Terme der rechten Seite zu betrachten:

$$\begin{aligned} & |f - g|_{s,p,\Omega_1} \\ & \stackrel{(2.3)}{\leq} \sum_{|\alpha|=s} \|f^{(\alpha)} - g^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega_1)} \stackrel{(A.5),(A.7)}{=} \sum_{|\alpha|=s} \|f^{(\alpha)}(x) - g(\delta, f^{(\alpha)}, x)\|_{L^p(\Omega_1)} \\ & \stackrel{(A.4)}{=} \sum_{|\alpha|=s} \left\| \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} F(\delta, f^{(\alpha)}, x, j) \right\|_{L^p(\Omega_1)} \\ & \stackrel{(A.3)}{=} \sum_{|\alpha|=s} \left\| \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{r}{j} f^{(\alpha)} \left(x + \sum_{i=1}^m \frac{j\delta}{r} [v_{i,1} + \dots + v_{i,r}] e_i \right) \right. \\ & \quad \left. dv_{1,1} \dots dv_{m,r} \right\|_{L^p(\Omega_1)} \\ & \stackrel{(2.11)}{=} \sum_{|\alpha|=s} \left\| \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Delta_{\left(\frac{\delta}{r}[v_{1,1}+\dots+v_{1,r}], \dots, \frac{\delta}{r}[v_{m,1}+\dots+v_{m,r}]\right)}^r f^{(\alpha)}(x) dv_{1,1} \dots dv_{m,r} \right\|_{L^p(\Omega_1)} \\ & \leq \sum_{|\alpha|=s} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left\| \Delta_{\left(\frac{\delta}{r}[v_{1,1}+\dots+v_{1,r}], \dots, \frac{\delta}{r}[v_{m,1}+\dots+v_{m,r}]\right)}^r f^{(\alpha)}(x) \right\|_{L^p(\Omega_1)} dv_{1,1} \dots dv_{m,r} \\ & \leq \sum_{|\alpha|=s} \omega_r \left(\frac{\delta}{r} r \sqrt{m}, f^{(\alpha)}, L^p(\Omega_2) \right) \leq (1 + \sqrt{m})^r \omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega_2)). \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

Jetzt zum Jackson-Anteil:

$$\begin{aligned} \delta^r |g|_{r+s,p,\Omega_1} & \stackrel{(2.3)}{\leq} \delta^r \sum_{|\alpha|=r} \sum_{|\beta|=s} |g^{(\beta)}|_{\alpha,p,\Omega_1} \stackrel{(A.5),(A.7)}{=} \delta^r \sum_{|\alpha|=r} \sum_{|\beta|=s} |g(\delta, f^{(\beta)}, x)|_{\alpha,p,\Omega_1} \\ & \stackrel{(A.6),(A.7)}{=} \delta^r \sum_{|\alpha|=r} \sum_{|\beta|=s} \left\| \sum_{j=1}^r (-1)^j \binom{r}{j} \left(\frac{r}{j\delta} \right)^r \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left[\Delta_{\frac{\alpha}{j\delta}} f^{(\beta)} \right] \right. \\ & \quad \left. \left(x_1 + \frac{j\delta}{r} [v_{1,1} + \dots + v_{1,r-\alpha_1}], \dots, x_m + \frac{j\delta}{r} [v_{m,1} + \dots + v_{m,r-\alpha_m}] \right) \right. \\ & \quad \left. dv_{1,1} \dots dv_{m,r-\alpha_m} \right\|_{L^p(\Omega_1)}. \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

Sofern alle auftretenden Argumente in Ω_2 liegen, liefert die Kemperman-Identität (siehe Lemma A.3)

$$\begin{aligned} \Delta_{\frac{j\delta}{r}}^\alpha f^{(\beta)}(y) &= \Delta_{\left(\frac{j\delta}{r}, \dots, \frac{j\delta}{r}\right)}^\alpha f^{(\beta)}(y) \\ &= \sum_{D \in D^*} (-1)^{r-|D|} \Delta_{\sum_{\mu \in D} \frac{1}{\mu} \left(\frac{j\delta}{r}, \dots, \frac{j\delta}{r}\right)_{[\mu, \alpha]}}^r f^{(\beta)} \left(y + \sum_{\mu \notin D} \left(\frac{j\delta}{r}, \dots, \frac{j\delta}{r}\right)_{[\mu, \alpha]} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Mit $x \in \Omega_1$ darf $y = (x_1 + \frac{j\delta}{r}[v_{1,1} + \dots + v_{1,r-\alpha_1}], \dots, x_m + \frac{j\delta}{r}[v_{m,1} + \dots + v_{m,r-\alpha_m}])$ gewählt werden. Um dies zu beweisen, nutzen wir die Definition von K_0 aus und zeigen, daß für

$$z := y + r \sum_{\mu \in D} \frac{1}{\mu} \left(\frac{j\delta}{r}, \dots, \frac{j\delta}{r}\right)_{[\mu, \alpha]} + \sum_{\mu \notin D} \left(\frac{j\delta}{r}, \dots, \frac{j\delta}{r}\right)_{[\mu, \alpha]} - x$$

gilt:

$$|z| \leq r(\sqrt{m} + 1 + \log r). \quad (\text{A.11})$$

Ist dies bewiesen, so folgt, daß wegen $z \geq 0$ alle Argumente von $f^{(\beta)}$ in (A.10) in der Menge $x + \text{cone}(\eta, \gamma, \rho) \subset \Omega_2$ liegen. Also zu (A.11):

Zunächst ist

$$\begin{aligned} & \left| r \sum_{\mu \in D} \frac{1}{\mu} \left(\frac{j\delta}{r}, \dots, \frac{j\delta}{r}\right)_{[\mu, \alpha]} + \sum_{\mu \notin D} \left(\frac{j\delta}{r}, \dots, \frac{j\delta}{r}\right)_{[\mu, \alpha]} \right| \\ & \leq r \sum_{\mu \in D} \frac{1}{\mu} \left| \left(\frac{j\delta}{r}, \dots, \frac{j\delta}{r}\right)_{[\mu, \alpha]} \right| + \sum_{\mu \notin D} \left| \left(\frac{j\delta}{r}, \dots, \frac{j\delta}{r}\right)_{[\mu, \alpha]} \right| \\ & \stackrel{j \leq r, \delta \leq 1}{\leq} r \sum_{\mu \in D} \frac{1}{\mu} \underbrace{|(1, 1, \dots, 1)_{[\mu, \alpha]}|}_{=1} + \sum_{\mu \notin D} |(1, 1, \dots, 1)_{[\mu, \alpha]}| \\ & = r \sum_{\mu \in D} \frac{1}{\mu} + \sum_{\mu \notin D} 1 = r \sum_{\mu=1}^r \frac{1}{\mu} + \sum_{\mu \notin D} \underbrace{\left(1 - \frac{r}{\mu}\right)}_{\leq 0} \leq r \sum_{\mu=1}^r \frac{1}{\mu} \leq r(1 + \log r) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

und weiter

$$\begin{aligned} |y - x| &= \left| \left(\frac{j\delta}{r}[v_{1,1} + \dots + v_{1,r-\alpha_1}], \dots, \frac{j\delta}{r}[v_{m,1} + \dots + v_{m,r-\alpha_m}]\right) \right| \\ & \stackrel{j \leq r, \delta \leq 1}{\leq} \sqrt{[v_{1,1} + \dots + v_{1,r-\alpha_1}]^2 + \dots + [v_{m,1} + \dots + v_{m,r-\alpha_m}]^2} \\ & \leq \sqrt{(r - \alpha_1)^2 + \dots + (r - \alpha_m)^2} \leq \sqrt{mr^2} = r\sqrt{m}; \end{aligned}$$

d.h., (A.11) ist gezeigt, und alle auftretenden Argumente liegen nach Definition von K_0 in Ω_2 . Damit ergibt sich aus (A.9) mit (A.10) (vgl. (A.12)):

$$\begin{aligned}
& \delta^r |g|_{r+s,p,\Omega_1} \\
& \stackrel{(A.9)}{\leq} \sum_{|\alpha|=r} \sum_{|\beta|=s} \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} \left(\frac{r}{j}\right)^r \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left\| \left[\Delta_{\frac{j\delta}{r}}^\alpha f^{(\beta)} \right] \left(x_1 + \frac{j\delta}{r} [v_{1,1} + \cdots + v_{1,r-\alpha_1}], \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \dots, x_m + \frac{j\delta}{r} [v_{m,1} + \cdots + v_{m,r-\alpha_m}] \right) \right\|_{L^p(\Omega_1)} dv_{1,1} \cdots dv_{m,r-\alpha_m} \\
& \stackrel{(A.10)}{\leq} \sum_{|\alpha|=r} \sum_{|\beta|=s} \sum_{j=1}^r \binom{r}{j} \left(\frac{r}{j}\right)^r \int_0^1 \cdots \int_0^1 \sum_{D \in D^*} \left\| \Delta_{\sum_{\mu \in D} \frac{1}{\mu} \left(\frac{j\delta}{r}, \dots, \frac{j\delta}{r}\right)}^r \right. \\
& \quad \left. f^{(\beta)} \left(\left(x_1 + \frac{j\delta}{r} [v_{1,1} + \cdots + v_{1,r-\alpha_1}], \dots, x_m + \frac{j\delta}{r} [v_{m,1} + \cdots + v_{m,r-\alpha_m}] \right) \right) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\mu \notin D} \left(\frac{j\delta}{r}, \dots, \frac{j\delta}{r} \right)_{[\mu, \alpha]} \right\|_{L^p(\Omega_1)} dv_{1,1} \cdots dv_{m,r-\alpha_m} \\
& \leq C(r, m) \omega_r^{(s)} \left(\max_{D \in D^*, |\alpha|=r} \left| \sum_{\mu \in D} \frac{1}{\mu} \left(\frac{j\delta}{r}, \dots, \frac{j\delta}{r} \right)_{[\mu, \alpha]} \right|, f, L^p(\Omega_2) \right) \\
& \stackrel{\text{vgl. (A.12)}}{\leq} C \omega_r^{(s)} \left((1 + \log r) \delta, f, L^p(\Omega_2) \right) \\
& \leq C(2 + \log r)^r \omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega_2)). \tag{A.13}
\end{aligned}$$

2. Fall: Der Kegel $\text{cone}(\eta, \gamma, \rho)$ enthält noch kein K_0 wie oben. Dieser Fall wird durch lineare Transformation auf den 1. Fall zurückgeführt. Es existiert eine invertierbare Matrix $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^m$, die eine lineare Abbildung auf \mathbb{R}^m beschreibt, so daß $K_0 \subset A \text{ cone}(\eta, \gamma, \rho)$ (vgl. Kapitel 3.2.3, vgl. [59]). Sei $\Omega'_1 := A\Omega_1$, $\Omega'_2 := A\Omega_2$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
& K(\delta^r, f, s, r+s; L^p(\Omega_1)) \\
& = \inf_{g \in W^{r+s}(\Omega_1)} (|f - g|_{s,p,\Omega_1} + \delta^r |g|_{r+s,p,\Omega_1}) \\
& \stackrel{(3.35)}{\leq} \inf_{g \in W^{r+s}(\Omega_1)} \left(\|A\|^s |\det A|^{-\frac{1}{p}} |(f - g) \circ A^{-1}|_{s,p,\Omega'_1} + \right. \\
& \quad \left. + \delta^r \|A\|^{r+s} |\det A|^{-\frac{1}{p}} |g \circ A^{-1}|_{r+s,p,\Omega'_1} \right) \\
& \leq C_1(A, s, p) \inf_{g \in W^{r+s}(\Omega_1)} (|f \circ A^{-1} - g \circ A^{-1}|_{s,p,\Omega'_1} + \delta^r |g \circ A^{-1}|_{r+s,p,\Omega'_1}) \\
& \stackrel{\text{Lemma 3.14}}{=} C_1 \inf_{g \in W^{r+s}(\Omega'_1)} (|f \circ A^{-1} - g|_{s,p,\Omega'_1} + \delta^r |g|_{r+s,p,\Omega'_1}) \\
& = C_1 K(\delta^r, f \circ A^{-1}, (W^{s,p}(\Omega'_1), |\cdot|_{s,p,\Omega'_1}), (W^{r+s}(\Omega'_1), |\cdot|_{r+s,p,\Omega'_1})) \\
& \stackrel{1. \text{ Fall}}{\leq} C_2(r, m, A, s, p) \omega_r^{(s)}(\delta, f \circ A^{-1}, L^p(\Omega'_2)) \quad (\delta \leq 1) \\
& = C_2 \sum_{|\alpha|=s} \sup_{|\nu| \leq \delta} \|\Delta_{\nu}^r D^\alpha (f \circ A^{-1})(x)\|_{L^p(\Omega'_2(r\nu))}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_2 \sum_{|\alpha|=s} \sup_{|\nu| \leq \delta} |\Delta_\nu^r (f \circ A^{-1})(x)|_{s,p,\Omega'_2(r\nu)} \\
&\stackrel{(2.11)}{=} C_3(r, m, A, s, p) \sup_{|\nu| \leq \delta} \left| \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} \underbrace{f \circ A^{-1}(x + j\nu)}_{f(\cdot + jA^{-1}\nu) \circ A^{-1}x} \right|_{s,p,\Omega'_2(r\nu)} \\
&\stackrel{(3.34)}{\leq} C_4 \|A^{-1}\|^s |\det A|^{\frac{1}{p}} \sup_{|\nu| \leq \delta} \left| \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f(x + jA^{-1}\nu) \right|_{s,p,\Omega_2(rA^{-1}\nu)},
\end{aligned}$$

denn $A^{-1}\Omega'_2 = \Omega_2$, so daß

$$\begin{aligned}
A^{-1}\Omega'_2(r\nu) &= \{y \in \Omega_2 : Ay \in \Omega'_2(r\nu)\} = \{y \in \Omega_2 : Ay + t\nu \in \Omega'_2, 0 \leq t \leq 1\} \\
&= \{y \in \Omega_2 : y + tA^{-1}\nu \in A^{-1}\Omega'_2 = \Omega_2, 0 \leq t \leq 1\} = \Omega_2(rA^{-1}\nu).
\end{aligned}$$

Weiter ist also

$$\begin{aligned}
&K(\delta^r, f, s, r+s; L^p(\Omega_1)) \\
&\leq C_4(r, m, A, s, p) \sum_{|\alpha|=s} \sup_{|\nu| \leq \delta} \left\| D^\alpha \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f(x + jA^{-1}\nu) \right\|_{L^p(\Omega_2(rA^{-1}\nu))} \\
&\leq C_4 \omega_r^{(s)} \left(\|A^{-1}\| \delta, f, L^p(\Omega_2) \right) \leq (1 + \|A^{-1}\|)^r C_4 \omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega_2)).
\end{aligned}$$

■

Man beachte, daß bei partiellen Moduln die obige Transformation so nicht durchführbar ist, da Differenzen entstehen, die nicht mehr entlang den Koordinatenachsen verlaufen und die damit innerhalb des Gebietes evtl. nicht mehr durch gemischte Differenzen darstellbar sind (vgl. [24]).

Da wir im nächsten Abschnitt zwangsläufig auf \overline{K} -Funktionale geführt werden, wäre ein Lemma A.4 für \overline{K} -Funktionale wünschenswert: Mit der im Anschluß formulierten Ungleichung Lemma A.7 läßt sich unter den Voraussetzungen von Lemma A.4 ähnlich zum dortigen Beweis leicht zeigen, daß z.B.

$$\overline{K}(\delta^r, f, s, r+s; L^p(\Omega_1)) \leq C[\omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega_2)) + \omega_r(\delta, f, L^p(\Omega_2))]$$

gilt. Für $r \leq s$ ist

$$\omega_r(\delta, f, L^p(\Omega_2)) \stackrel{\text{Lemma 2.16e)}}{\leq} C\delta^r |f|_{r,p,\Omega_2} \leq C\delta^r \|f\|_{s,p,\Omega_2}.$$

Ist andererseits $r > s$ und Ω_2 ein LG-Gebiet, so folgt bei Verwendung der Marchaud-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\omega_r(\delta, f, L^p(\Omega_2)) &\stackrel{\text{Lemma 2.16e)}}{\leq} C_1 \delta^s \omega_{r-s}^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega_2)) \\
&\stackrel{\text{Lemma 2.16g)}}{\leq} C_2 \left(\delta^{s+r-s} |f|_{s,p,\Omega_2} + \delta^{s+r-s} \int_\delta^1 t^{-1+s} \frac{\omega_r^{(s)}(t, f, L^p(\Omega_2))}{t^r} dt \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{\text{Lemma 2.16f)}}{\leq} C_2 \left(\delta^r |f|_{s,p,\Omega_2} + \delta^r \int_{\delta}^1 2^r t^{-1+s} \frac{\omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega_2))}{\delta^r} dt \right) \\
& \leq C_2 \left(\delta^r |f|_{s,p,\Omega_2} + 2^r \frac{1}{s} (1 - \delta^s) \omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega_2)) \right) \\
& \leq C_3 (\delta^r \|f\|_{s,p,\Omega_2} + \omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega_2))).
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir damit

$$\overline{K}(\delta^r, f, s, r + s; L^p(\Omega_1)) \leq C[\delta^r \|f\|_{s,p,\Omega_2} + \omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega_2))].$$

Dabei schmerzt der Korrekturterm $\delta^r \|f\|_{s,p,\Omega_2}$ bei der Betrachtung der Konvergenzgeschwindigkeit nicht weiter. Außerdem wird bei diesem Vorgehen die Beschränktheit des Gebietes nicht benötigt. Wir werden aber in Kapitel A.4 um den Preis der Beschränktheit des Gebietes auch noch den Korrekturterm wegdiskutieren, so daß der Äquivalenzsatz auch zum Beweis von Satturionssätzen benutzt werden kann (vgl. Beweis zu Lemma 2.22).

A.3 Teilung der Einheit

In diesem Abschnitt spalten wir die \overline{K} -Funktionale in eine Summe von Funktionalen über Teilgebieten auf, die die Voraussetzungen der Aussagen des letzten Unterkapitels erfüllen. Die Teilgebiete ermöglichen also den Einsatz von Steklov-Mitteln. Dabei benötigen wir die Voraussetzung, daß Ω ein LG-Gebiet ist. Wir gestalten zunächst diese Bedingung etwas handlicher.

Lemma A.5 *Sei $Q \subset \mathbb{R}^m$ eine beschränkte, offene Menge. Wir setzen zu $\kappa > 0$*

$$Q^\kappa := \{x \in Q : \overline{S(\kappa, x)} \subset Q\}.$$

Die Menge Q^κ ist offen. Für $0 < \kappa_1 < \kappa_2$ gilt offensichtlich $Q^{\kappa_2} \subset Q^{\kappa_1} \subset Q$. Ist zusätzlich $Q^{\kappa_2} \neq \emptyset$, so ist $\text{dist}(\partial Q^{\kappa_1}, Q^{\kappa_2}) := \inf\{|x-y| : x \in \partial Q^{\kappa_1}, y \in Q^{\kappa_2}\} \geq \kappa_2 - \kappa_1$, also auch $\text{dist}(\partial Q^{\kappa_1}, \partial Q^{\kappa_2}) \geq \kappa_2 - \kappa_1$.

Beweis Wir zeigen zunächst, daß Q^κ offen ist: Ist $Q^\kappa = \emptyset$, so ist die Aussage trivial. Mit $x \in Q^\kappa$ ist anderenfalls auch die kompakte Menge $\overline{S(\kappa, x)}$ in der offenen Menge Q enthalten, also sind $\overline{S(\kappa, x)}$ und ∂Q disjunkte (nichtleere) kompakte Mengen. Nach [95, II, S.27] wird $\text{dist}(\overline{S(\kappa, x)}, \partial Q)$ für zwei Punkte $y \in \overline{S(\kappa, x)}$ und $z \in \partial Q$ angenommen, so daß $\varepsilon := \text{dist}(\overline{S(\kappa, x)}, \partial Q) = |y - z| > 0$ ist. Damit folgt, daß $S(\varepsilon/2, x) \subset Q^\kappa$ und Q^κ offen ist.

Schließlich schätzen wir noch den Abstand zwischen ∂Q^{κ_1} und Q^{κ_2} ab. Da $\emptyset \neq Q^{\kappa_1} \neq \mathbb{R}^m$, ist $\partial Q^{\kappa_1} \neq \emptyset$. Sei $x \in \partial Q^{\kappa_1}$. Dann existiert zu jedem $0 < \varepsilon < \kappa_2 - \kappa_1$ ein $y \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^m} Q$ mit $|x - y| \leq \kappa_1 + \varepsilon$. Sei $z \in Q^{\kappa_2}$. Dann ist $|z - y| \geq \kappa_2$ und

$$|x - z| = |x - y + y - z| \geq ||y - z| - |x - y|| \geq \kappa_2 - \kappa_1 - \varepsilon.$$

Da ε beliebig ist, folgt die Behauptung. \blacksquare

Lemma A.6 (vgl. Definition 2.4) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes LG-Gebiet. Dann existiert eine endliche Familie beschränkter, offener Mengen $\{Q_j : 1 \leq j \leq n\}$ und eine zugehörige Familie von Kegeln $\text{cone}(\eta_j, \gamma_j, \rho_j)$ sowie ein $\kappa_0 > 0$, so daß $Q_j^{\kappa_0} \cap \Omega \neq \emptyset$ (vgl. Lemma A.5) und

- a) $\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^n Q_j^\kappa$ für alle $0 < \kappa \leq \kappa_0$,
- b) $(Q_j \cap \Omega) + \text{cone}(\eta_j, \gamma_j, \rho_j) \subset \Omega$,
- c) $\hat{\Omega}_\kappa \cup \bigcup_{j=1}^n (Q_j^\kappa \cap \Omega) = \Omega$ für alle $0 < \kappa < \kappa_0$, wobei

$$\hat{\Omega}_\kappa := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \kappa_0 - \kappa\}.$$

Beweis Das Lemma ist eine Umformulierung der Definition 2.4, nach der eine endliche Familie $\{Q_j : 1 \leq j \leq n\}$ offener Mengen mit zugehörigen Kegeln $\text{cone}(\eta_j, \gamma_j, \rho_j)$ und ein $\kappa_1 > 0$ existieren, so daß b) gilt und

$$\partial\Omega \subset \bigcup_{j=1}^n \{x \in Q_j : S(\kappa_1, x) \subset Q_j\}. \quad (\text{A.14})$$

Da Ω beschränkt ist, können die Q_j beschränkt gewählt werden. Aus (A.14) folgt die Bedingung a), denn wählen wir κ_0 mit $0 < \kappa_0 < \kappa_1$, so gilt für $0 < \kappa \leq \kappa_0$:

$$\begin{aligned} \{x \in Q_j : S(\kappa_1, x) \subset Q_j\} &\subset \{x \in Q_j : \overline{S(\kappa_0, x)} \subset Q_j\} = Q_j^{\kappa_0} \\ &\subset \{x \in Q_j : \overline{S(\kappa, x)} \subset Q_j\} = Q_j^\kappa \\ &(\subset \{x \in Q_j : S(\kappa, x) \subset Q_j\}). \end{aligned}$$

Ist $Q_j^{\kappa_0} \cap \Omega = \emptyset$, so ist auch $Q_j^{\kappa_0} \cap \partial\Omega = \emptyset$, da $Q_j^{\kappa_0}$ nach Lemma A.5 offen ist. Diese Q_j sind für die Überdeckung von $\partial\Omega$ nicht nötig und können weggelassen werden. Es bleibt c) zu zeigen. Ist $x \in \Omega \setminus \hat{\Omega}_\kappa$, so existiert ein $y \in \partial\Omega$ mit $|x - y| \leq \kappa_0 - \kappa$. Für ein $1 \leq j \leq n$ ist nach a) $y \in Q_j^{\kappa_0}$. Damit ist aber auch $x \in Q_j^\kappa$. Denn ist $z \in \mathbb{R}^m$ mit $|x - z| \leq \kappa$, so ist $|y - z| \leq |y - x| + |x - z| \leq \kappa_0 - \kappa + \kappa = \kappa_0$, also $\overline{S(\kappa, x)} \subset \overline{S(\kappa_0, y)} \subset Q_j$. Also werden alle $x \in \Omega \setminus \hat{\Omega}_\kappa$ durch die Vereinigung erfaßt. \blacksquare

Bei der Aufspaltung der \overline{K} -Funktionale werden Ableitungen entstehen, die nicht in den Normen bzw. Halbnormen der Funktionale auftreten. Um diese zu beseitigen, dienen die folgenden Ungleichungen, die auch in Kapitel 2.2 benutzt werden:

Lemma A.7 (Kolmogoroff-Ungleichung, vgl. [1, S.75]) Seien $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\Omega_1 \subset \Omega_2$, und es existiere ein Kegel $\text{cone}(\eta, \gamma, \rho)$, so daß $\Omega_1 + \text{cone}(\eta, \gamma, \rho) \subset \Omega_2$. Dann existiert eine Konstante $C = C(r, \Omega_1, \Omega_2)$, so daß $(0 \leq s \leq r)$

$$|f|_{s,p,\Omega_1} \leq C(\|f\|_{L^p(\Omega_2)} + |f|_{r,p,\Omega_2}), \quad (\text{A.15})$$

$$|f|_{s,\overline{\Omega}_1} \leq C(\|f\|_{C(\overline{\Omega}_2)} + |f|_{r,\overline{\Omega}_2}) \quad (\text{A.16})$$

für jedes $f \in C^r(\Omega_2) \cap W^{r,p}(\Omega_2)$, $1 \leq p < \infty$, bzw. $f \in C^r(\overline{\Omega}_2)$ gilt.

Beweis Wir beschränken uns schreibtechnisch auf (A.15). In $\text{cone}(\eta, \gamma, \rho)$ sei außerdem die Menge $[0, mr]^m \setminus \{0\}$ enthalten. Anderenfalls läßt sich diese Situation mittels linearer Transformation unter Berücksichtigung von Lemma 3.14 analog zum Beweis von Lemma A.4 herstellen.

Sei jetzt $Q_1 := \Omega_1$ und für $1 < j \leq mr + 1$:

$$Q_j := Q_{j-1} + [0, 1]^m.$$

Dann ist nach Voraussetzung $Q_j \subset \Omega_2$ für $1 \leq j \leq mr + 1$. Wir zeigen zunächst, daß eine Konstante $C (\geq 1)$ existiert, so daß für alle $|\alpha| \leq r$, $1 \leq j \leq (m-1)r + 1$, $1 \leq l \leq m$ und $0 \leq k \leq r - |\alpha|$ gilt:

$$\|f^{(\alpha)}\|_{L^p(Q_j)} \leq C(\|f^{(\alpha - \alpha_l e_l)}\|_{L^p(Q_{j+r})} + \|f^{(\alpha + k e_l)}\|_{L^p(Q_{j+r})}). \quad (\text{A.17})$$

Für $|\alpha| = r$ (d.h. $k = 0$) und für $\alpha_l = 0$ ist dies trivial, anderenfalls existiert nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (x_l, x_l + \alpha_l/r)$ mit $(x \in Q_j)$

$$\Delta_{\frac{1}{r}}^{\alpha_l e_l} f^{(\alpha - \alpha_l e_l)}(x) = \frac{1}{r^{\alpha_l}} f^{(\alpha)}(x_1, \dots, x_{l-1}, \xi, x_{l+1}, \dots, x_m),$$

dabei liegen wegen $\alpha_l/r \leq 1$ alle auftretenden Argumente in Q_{j+1} . Damit ist

$$\begin{aligned} |f^{(\alpha)}(x)| &= \left| f^{(\alpha)}(x_1, \dots, \xi, \dots, x_m) - \int_{x_l}^{\xi} f^{(\alpha + e_l)}(x_1, \dots, t, \dots, x_m) dt \right| \\ &\leq r^{\alpha_l} \left| \Delta_{\frac{1}{r}}^{\alpha_l e_l} f^{(\alpha - \alpha_l e_l)}(x) \right| + \int_{x_l}^{\xi} |f^{(\alpha + e_l)}(x_1, \dots, t, \dots, x_m)| dt \\ &\stackrel{v=t-x_l}{\leq} r^{\alpha_l} \left| \Delta_{\frac{1}{r}}^{\alpha_l e_l} f^{(\alpha - \alpha_l e_l)}(x) \right| + \int_0^1 |f^{(\alpha + e_l)}(x_1, \dots, v + x_l, \dots, x_m)| dv, \end{aligned}$$

da $0 < \xi - x_l < \alpha_l/r \leq 1$. Also:

$$\begin{aligned} \|f^{(\alpha)}\|_{L^p(Q_j)} &\leq 2^{\alpha_l} r^{\alpha_l} \|f^{(\alpha - \alpha_l e_l)}\|_{L^p(Q_{j+1})} + \int_0^1 \|f^{(\alpha + e_l)}(x_1, \dots, t + x_l, \dots, x_m)\|_{L^p(Q_j)} dt \\ &\leq 2^{\alpha_l} r^{\alpha_l} \|f^{(\alpha - \alpha_l e_l)}\|_{L^p(Q_{j+1})} + \|f^{(\alpha + e_l)}\|_{L^p(Q_{j+1})}. \end{aligned}$$

Iteration ergibt damit ($C > 1$)

$$\begin{aligned} \|f^{(\alpha)}\|_{L^p(Q_j)} &\leq C(\|f^{(\alpha - \alpha_l e_l)}\|_{L^p(Q_{j+k})} + \|f^{(\alpha + k e_l)}\|_{L^p(Q_{j+k})}), \\ &\leq C(\|f^{(\alpha - \alpha_l e_l)}\|_{L^p(Q_{j+(r-|\alpha|)})} + \|f^{(\alpha + k e_l)}\|_{L^p(Q_{j+(r-|\alpha|)})}), \end{aligned}$$

so daß wegen $k \leq r - |\alpha| \leq r$ bereits (A.17) bewiesen ist.

Sei nun wieder $|\alpha| \leq r$, dann folgt

$$\begin{aligned} &\|f^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega_1)} \\ &= \|f^{(\alpha)}\|_{L^p(Q_1)} \stackrel{(\text{A.17})}{\leq} C \left(\|f^{(0, \alpha_2, \dots)}\|_{L^p(Q_{1+r})} + \|f^{(r - \sum_{i=2}^m \alpha_i, \alpha_2, \dots)}\|_{L^p(Q_{1+r})} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(A.17)}{\leq} C \left(C \left(\|f^{(0,0,\alpha_3,\dots)}\|_{L^p(Q_{1+2r})} + \underbrace{\|f^{(0,r-\sum_{i=3}^m \alpha_i, \alpha_3, \dots)}\|_{L^p(Q_{1+2r})}}_{\leq |f|_{r,p,Q_{1+mr}}} \right) \right. \\
& \quad \left. + \underbrace{\|f^{(r-\sum_{i=2}^m \alpha_i, \alpha_2, \dots)}\|_{L^p(Q_{1+r})}}_{\leq |f|_{r,p,Q_{1+mr}}} \right) \\
& \stackrel{(A.17)}{\leq} \dots \stackrel{(A.17)}{\leq} C^m (\|f\|_{L^p(Q_{1+mr})} + m|f|_{r,p,Q_{1+mr}}), \tag{A.18}
\end{aligned}$$

so daß schließlich für $0 \leq s \leq r$ gilt:

$$|f|_{s,p,\Omega_1} \stackrel{(2.3)}{\leq} \sum_{|\alpha|=s} \|f^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega_1)} \stackrel{(A.18)}{\leq} C (\|f\|_{L^p(\Omega_2)} + |f|_{r,p,\Omega_2}).$$

■

Folgerung A.8 (vgl. [1, S.75]) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes LG-Gebiet. Dann existiert eine Konstante C , so daß für jedes $f \in W^{r,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, $0 \leq s \leq r$, $|\alpha| \leq r$, $1 \leq l \leq m$ und $0 \leq k \leq r - |\alpha|$ gilt:

$$\begin{aligned}
|f|_{s,p,\Omega} &\leq C (\|f\|_{L^p(\Omega)} + |f|_{r,p,\Omega}) \\
\|f^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega)} &\leq C (\|f^{(\alpha-\alpha_l e_l)}\|_{L^p(\Omega)} + \|f^{(\alpha+k e_l)}\|_{L^p(\Omega)}). \tag{A.19}
\end{aligned}$$

Für $f \in C^r(\overline{\Omega})$ gelten die analogen Aussagen.

Beweis Wegen (2.4) reicht es aus, im L^p -Fall die Aussagen für $f \in C^r(\Omega) \cap W^{r,p}(\Omega)$ zu zeigen. Nach Lemma A.6 ist Ω darstellbar als $\Omega = \hat{\Omega}_\kappa \cup \bigcup_{j=1}^n (Q_j^\kappa \cap \Omega)$ für ein $\kappa < \kappa_0$. Diese Mengen erfüllen die Voraussetzungen von Lemma A.7 mit $\Omega_2 = \Omega$. Für die $Q_j^\kappa \cap \Omega \subset Q_j \cap \Omega$ folgt das aus Lemma A.6b), und zur Menge $\hat{\Omega}_\kappa$ läßt sich jeder Kegel $\text{cone}(\eta, \gamma, \rho)$ mit $\rho < \kappa_0 - \kappa$ wählen (vgl. Lemma A.6c)). Die Aussagen folgen damit sofort aus (A.15)–(A.17), z.B. ist

$$\begin{aligned}
|f|_{s,p,\Omega} &\leq \sum_{j=1}^n |f|_{s,p,Q_j^\kappa \cap \Omega} + |f|_{s,p,\hat{\Omega}_\kappa} \\
&\stackrel{(A.15)}{\leq} \sum_{j=1}^{n+1} C_j [\|f\|_{L^p(\Omega)} + |f|_{r,p,\Omega}] \leq C [\|f\|_{L^p(\Omega)} + |f|_{r,p,\Omega}].
\end{aligned}$$

■

Folgerung A.9 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein LG-Gebiet, $|\beta| = r$. Dann existiert eine Konstante C , so daß für jedes $f \in W^{r,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, und $\alpha \leq \beta$

$$\|f^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega)} \leq C \sum_{\gamma \in J} \|f^{(\gamma)}\|_{L^p(\Omega)}$$

gilt, wobei $J = \{\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) : \gamma_j \in \{0, \beta_j\}, 1 \leq j \leq m\}$ die Menge der Ecken des von 0 und β aufgespannten m -Rechtecks ist.

Beweis Wir wenden sukzessive (A.19) an, wobei wir z.B. im ersten Schritt $k = \beta_1 - \alpha_1$ und $l = 1$ wählen (beachte: $k \leq |\beta - \alpha| = r - |\alpha|$, da $\alpha \leq \beta$).

$$\begin{aligned} \|f^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega)} &\leq C_1 (\|f^{(0,\alpha_2,\dots,\alpha_m)}\|_{L^p(\Omega)} + \|f^{(\beta_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m)}\|_{L^p(\Omega)}) \\ &\leq C_2 (\|f^{(0,0,\alpha_3,\dots,\alpha_m)}\|_{L^p(\Omega)} + \|f^{(0,\beta_2,\alpha_3,\dots,\alpha_m)}\|_{L^p(\Omega)} + \\ &\quad + \|f^{(\beta_1,0,\alpha_3,\dots,\alpha_m)}\|_{L^p(\Omega)} + \|f^{(\beta_1,\beta_2,\alpha_3,\dots,\alpha_m)}\|_{L^p(\Omega)}) \\ &\leq \dots \leq C \sum_{\gamma \in J} \|f^{(\gamma)}\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

■

Diese Aussage gilt in einer wesentlich schärferen Form, die auf Aronszajn und Smith [87] zurückgeht:

Satz A.10 (siehe [88, S.66], vgl. [8, S.363]) Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes LG-Gebiet, $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^m$ mit $|\alpha| \leq r$. Dann existiert eine Konstante C , so daß für jedes $f \in W^{r,p}(\Omega)$ gilt:

$$\|f^{(\alpha)}\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left[\|f\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{j=1}^m \|f^{(re_j)}\|_{L^p(\Omega)} \right]. \quad (\text{A.20})$$

Es werden also keine gemischten Ableitungen benötigt.

Jetzt wird das \overline{K} -Funktional zunächst mittels Teilung der Einheit in zwei einfacher zu handhabende aufgespalten, bevor dieses Argument dann später für die Überdeckung aus Lemma A.6c) iteriert wird.

Lemma A.11 (vgl. [59]) Seien $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4, \Omega_5, \Omega \subset \mathbb{R}^m$ offen und beschränkt, so daß $\Omega_1 \subset \Omega_3$, $\Omega_2 \subset \Omega_4$, $\text{dist}(\partial\Omega_i, \partial\Omega_{i+2}) \geq \varepsilon$, $i = 1, 2$, für ein $\varepsilon > 0$, und zu einem $0 < \delta_0 < \varepsilon$ sei $(\Omega_1 \subset) \{x \in \Omega_3 : S(\delta_0, x) \subset \Omega_3\} \subset \Omega_5$, $V_i := \Omega_i \cap \Omega$, $i = 1, \dots, 5$. Weiter existiere ein Kegel $\text{cone}(\eta, \gamma, \rho)$, $\rho < \delta_0 < \varepsilon$, so daß $V_5 + \text{cone}(\eta, \gamma, \rho) \subset V_3$ (siehe Abbildung A.1). Dann existiert eine (von f und δ) unabhängige Konstante C , so daß für $f \in C^s(\Omega) \cap W^{s,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, und $0 < \delta \leq 1$ gilt:

$$\overline{K}(\delta, f, s, r + s; L^p(V_1 \cup V_2)) \leq C (\overline{K}(\delta, f, s, r + s; L^p(V_3)) + \overline{K}(\delta, f, s, r + s; L^p(V_4))). \quad (\text{A.21})$$

Entsprechend gilt für $f \in C^s(\overline{\Omega})$:

$$\overline{K}(\delta, f, s, r + s; C(\overline{V_1 \cup V_2})) \leq C (\overline{K}(\delta, f, s, r + s; C(\overline{V_3})) + \overline{K}(\delta, f, s, r + s; C(\overline{V_4}))). \quad (\text{A.22})$$

Beweis Wir beschränken uns wieder auf den L^p -Fall. Zunächst existiert eine Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ mit $\text{Tr } \varphi \subset \Omega_5$ und $\varphi \equiv 1$ auf Ω_1 (siehe [58, S.35], vgl. [59] und (5.18)).

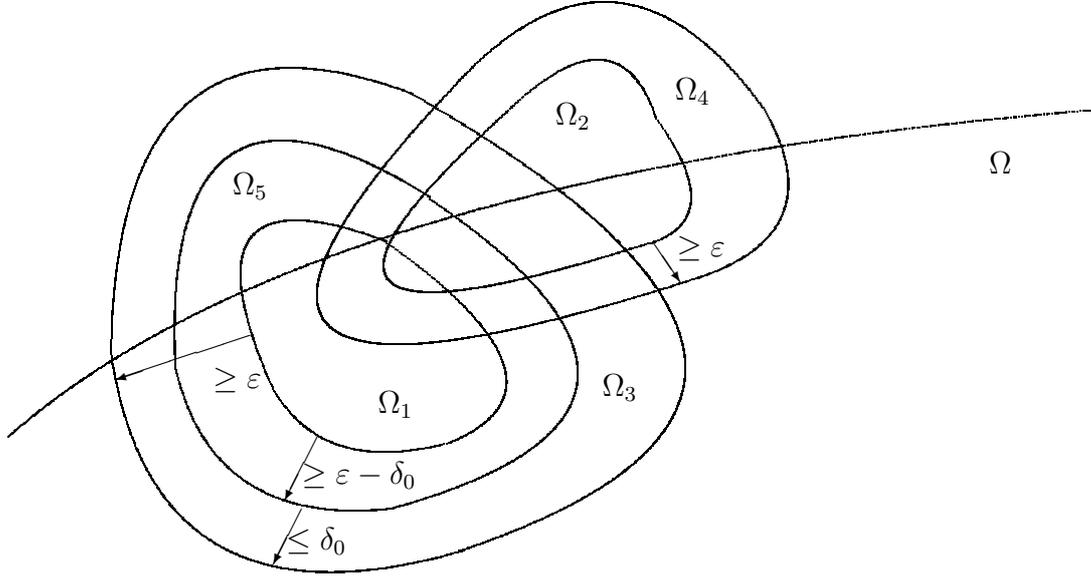


Abbildung A.1: Mengen in Lemma A.11

Zu $\varepsilon_1 > 0$ seien jetzt $g_1 \in C^{r+s}(V_3) \cap W^{r+s,p}(V_3)$, $g_2 \in C^{r+s}(V_4) \cap W^{r+s,p}(V_4)$, so daß (vgl. Definition 2.17, (2.4))

$$\begin{aligned} \|f - g_1\|_{s,p,V_3} + \delta|g_1|_{r+s,p,V_3} &\leq \overline{K}(\delta, f, s, r+s, L^p(V_3)) + \varepsilon_1 \\ \|f - g_2\|_{s,p,V_4} + \delta|g_2|_{r+s,p,V_4} &\leq \overline{K}(\delta, f, s, r+s, L^p(V_4)) + \varepsilon_1, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

und sei damit die Funktion $g := \varphi g_1 + (1 - \varphi)g_2$ auf $V_1 \cup V_2$ definiert. Beachte, daß $g \in C^{r+s}(V_1 \cup V_2) \cap W^{r+s,p}(V_1 \cup V_2)$ wohldefiniert ist, da

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{für } x \in V_1 \subset V_3 \\ g_2(x) & \text{für } x \in V_2 \setminus V_5 \subset V_4 \\ \varphi(x)g_1(x) + (1 - \varphi(x))g_2(x) & \text{für } x \in V_5 \cap V_2 \subset V_3 \cap V_4. \end{cases}$$

Wir schätzen nun die beiden Terme der rechten Seite von

$$\overline{K}(\delta, f, s, r+s, L^p(V_1 \cup V_2)) \leq \|f - g\|_{s,p,V_1 \cup V_2} + \delta|g|_{r+s,p,V_1 \cup V_2} \quad (\text{A.24})$$

ab. Sei dazu $|\alpha| \leq s$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\|D^\alpha(f - g)\|_{L^p(V_1 \cup V_2)} \\ &= \|D^\alpha(\varphi(f - g_1) + (1 - \varphi)(f - g_2))\|_{L^p(V_1 \cup V_2)} \\ &\stackrel{\text{Tr } \varphi \subset \Omega_5}{\leq} \|D^\alpha(\varphi(f - g_1))\|_{L^p((V_1 \cup V_2) \cap V_5)} + \|D^\alpha((1 - \varphi)(f - g_2))\|_{L^p(V_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|D^\alpha(\varphi(f - g_1))\|_{L^p(V_3)} + \|D^\alpha((1 - \varphi)(f - g_2))\|_{L^p(V_4)} \\
&= \left\| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta}(f - g_1) \right\|_{L^p(V_3)} + \left\| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta (1 - \varphi) D^{\alpha-\beta}(f - g_2) \right\|_{L^p(V_4)} \\
&\leq C \left(\|f - g_1\|_{s,p,V_3} + \|f - g_2\|_{s,p,V_4} \right),
\end{aligned}$$

wobei die Konstante C vom fest gewählten $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ abhängt. Damit:

$$\|f - g\|_{s,p,V_1 \cup V_2} \stackrel{\text{vgl. (2.3)}}{\leq} \sum_{|\alpha| \leq s} \|D^\alpha(f - g)\|_{L^p(V_1 \cup V_2)} \leq C(\|f - g_1\|_{s,p,V_3} + \|f - g_2\|_{s,p,V_4}). \quad (\text{A.25})$$

Beim Jackson-Anteil

$$|g|_{r+s,p,V_1 \cup V_2} \leq |g_1|_{r+s,p,V_1} + |g_2|_{r+s,p,V_2 \setminus V_5} + |g|_{r+s,p,(V_5 \setminus V_1) \cap V_2}$$

ist wegen $V_1 \subset V_3$ und $V_2 \setminus V_5 \subset V_4$ nur noch $|g|_{r+s,p,(V_5 \setminus V_1) \cap V_2}$ zu untersuchen:

$$\begin{aligned}
|g|_{r+s,p,(V_5 \setminus V_1) \cap V_2} &= |g_2 + \varphi(g_1 - g_2)|_{r+s,p,(V_5 \setminus V_1) \cap V_2} \\
&\leq |g_2|_{r+s,p,V_2} + \sum_{|\alpha|=r+s} \sum_{\beta \leq \alpha} \left\| \binom{\alpha}{\beta} D^\beta \varphi D^{\alpha-\beta}(g_1 - g_2) \right\|_{L^p(V_2 \cap V_5)} \\
&\leq |g_2|_{r+s,p,V_2} + C_1 \sum_{j=0}^{r+s} |g_1 - g_2|_{j,p,V_2 \cap V_5} \\
&\stackrel{(\text{A.15})}{\leq} |g_2|_{r+s,p,V_2} + C_2(\|g_1 - g_2\|_{L^p(V_3 \cap V_4)} + |g_1 - g_2|_{r+s,p,V_3 \cap V_4}).
\end{aligned}$$

Beachte, daß für diesen Schritt die Voraussetzungen von Lemma A.7 erfüllt sind: Wegen $V_5 + \text{cone}(\eta, \gamma, \rho) \subset V_3$ ist $(V_2 \cap V_5) + \text{cone}(\eta, \gamma, \rho) \subset V_3$, und wegen $\text{dist}(\partial\Omega_2, \partial\Omega_4) \geq \varepsilon$ ist $V_2 + \text{cone}(\eta, \gamma, \rho) \subset \Omega_4$, also $(V_2 \cap V_5) + \text{cone}(\eta, \gamma, \rho) \subset V_3 \cap \Omega_4 = V_3 \cap V_4$. Damit haben wir

$$\begin{aligned}
&|g|_{r+s,p,(V_5 \setminus V_1) \cap V_2} \\
&\leq |g_2|_{r+s,p,V_2} + C_2(|g_1|_{r+s,p,V_3} + |g_2|_{r+s,p,V_4}) + C_2\|g_1 - f + f - g_2\|_{L^p(V_3 \cap V_4)} \\
&\leq C_2|g_1|_{r+s,p,V_3} + (C_2 + 1)|g_2|_{r+s,p,V_4} + C_2(\|g_1 - f\|_{L^p(V_3)} + \|f - g_2\|_{L^p(V_4)}).
\end{aligned}$$

Es ist also

$$|g|_{r+s,p,V_1 \cup V_2} \leq C \left[|g_1|_{r+s,p,V_3} + |g_2|_{r+s,p,V_4} + \|f - g_1\|_{L^p(V_3)} + \|f - g_2\|_{L^p(V_4)} \right] \quad (\text{A.26})$$

und zusammen mit (A.24) und (A.25)

$$\begin{aligned}
&\overline{K}(\delta, f, s, r + s; L^p(V_1 \cup V_2)) \\
&\leq C_1 \left[\|f - g_1\|_{s,p,V_3} + \|f - g_2\|_{s,p,V_4} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\delta C_2 \left[|g_1|_{r+s,p,V_3} + |g_2|_{r+s,p,V_4} + \|f - g_1\|_{L^p(V_3)} + \|f - g_2\|_{L^p(V_4)} \right] \\
& \stackrel{\delta \leq 1}{\leq} C_3 \left[\|f - g_1\|_{s,p,V_3} + \delta |g_1|_{r+s,p,V_3} + \|f - g_2\|_{s,p,V_4} + \delta |g_2|_{r+s,p,V_4} \right] \\
& \stackrel{(A.23)}{\leq} C_3 \left[\overline{K}(\delta, f, s, r + s; L^p(V_3)) + \overline{K}(\delta, f, s, r + s; L^p(V_4)) + 2\varepsilon_1 \right].
\end{aligned}$$

Da ε_1 beliebig gewählt werden kann, folgt die Aussage (A.21). Völlig analog folgt (A.22). \blacksquare

Wir sehen insbesondere am eben gebrachten Beweis, daß die entsprechende Aussage so für K - statt \overline{K} -Funktionale nicht gezeigt werden kann, da die Leibniz-Regel zu Termen führt, die dann nicht mehr durch die Halbnormen des Funktionals majorisiert werden können.

Wir wenden nun die Aussage von Lemma A.11 iteriert an:

Lemma A.12 (vgl. [59]) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes LG-Gebiet, d.h., nach Lemma A.6 existiert eine Familie $\{Q_j : 1 \leq j \leq n\}$ mit zugehörigen Kegeln, so daß die dortigen Bedingungen a), b) und c) mit einem $\kappa_0 > 0$ erfüllt sind. Sei $\kappa < \kappa_0$ (insbesondere ist dann $\hat{\Omega}_\kappa$ wie in Lemma A.6c) definiert). Dann gilt: Für $f \in C^s(\Omega) \cap W^{s,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, bzw. $f \in C^s(\overline{\Omega})$, existiert eine von $0 < \delta \leq 1$ und f unabhängige Konstante C , so daß

$$\overline{K}(\delta, f, s, r + s; L^p(\Omega)) \leq C \left(\sum_{j=1}^n \overline{K}(\delta, f, s, r + s; L^p(Q_j \cap \Omega)) + \overline{K}(\delta, f, s, r + s; L^p(\hat{\Omega}_\kappa)) \right), \quad (A.27)$$

$$\overline{K}(\delta, f, s, r + s; C(\overline{\Omega})) \leq C \left(\sum_{j=1}^n \overline{K}(\delta, f, s, r + s; C(\overline{Q_j \cap \Omega})) + \overline{K}(\delta, f, s, r + s; C(\overline{\hat{\Omega}_\kappa})) \right). \quad (A.28)$$

Falls $\hat{\Omega}_\kappa = \emptyset$, entfällt jeweils der letzte Summand.

Beweis Wir überdecken zunächst einen Streifen um $\partial\Omega$ und dann im letzten Schritt das Verbleibende des Inneren von Ω . Dabei wird sukzessive Lemma A.11 angewendet. Wir betrachten wieder nur den L^p -Fall (A.27).

Seien $V_j^\kappa := Q_j^\kappa \cap \Omega$ und $\kappa_1 := \kappa/(2n)$. Wir zeigen jetzt für $1 \leq j \leq n-1$:

$$\begin{aligned}
& \overline{K} \left(\delta, f, s, r + s; L^p \left(V_j^{\kappa/2-(j-1)\kappa_1} \cup \bigcup_{l=j+1}^n V_l^{\kappa/2-(j-1)\kappa_1} \right) \right) \\
& \leq C \left[\overline{K}(\delta, f, s, r + s; L^p(V_j^{\kappa/2-j\kappa_1})) + \overline{K} \left(\delta, f, s, r + s; L^p \left(\bigcup_{l=j+1}^n V_l^{\kappa/2-j\kappa_1} \right) \right) \right].
\end{aligned} \quad (A.29)$$

Dazu setzen wir in Lemma A.11:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= Q_j^{\kappa/2-(j-1)\kappa_1}, & \Omega_2 &:= \bigcup_{l=j+1}^n Q_l^{\kappa/2-(j-1)\kappa_1}, \\ \Omega_3 &:= Q_j^{\kappa/2-j\kappa_1}, & \Omega_4 &:= \bigcup_{l=j+1}^n Q_l^{\kappa/2-j\kappa_1}, \\ \Omega_5 &:= Q_j^{\kappa/2-(j-1/2)\kappa_1}.\end{aligned}$$

Man beachte, daß alle diese Mengen nach Lemma A.6 nichtleer sind. Damit ist $\text{dist}(\partial\Omega_i, \partial\Omega_{i+2}) \geq \varepsilon := \kappa_1$, $i = 1, 2$. Denn ist z.B. $x \in \partial\left(\bigcup_{l=j+1}^n Q_l^{\kappa/2-(j-1)\kappa_1}\right)$, so ist $x \in \partial Q_{l_0}^{\kappa/2-(j-1)\kappa_1}$ für ein $j+1 \leq l_0 \leq n$, aber (Lemma A.5, beachte $x \in Q_{l_0}^{\kappa/2-j\kappa_1}$)

$$\varepsilon = \kappa_1 \leq \text{dist}(x, \partial Q_{l_0}^{\kappa/2-j\kappa_1}) \leq \text{dist}\left(x, \partial \bigcup_{l=j+1}^n Q_l^{\kappa/2-j\kappa_1}\right),$$

so daß $\text{dist}(\partial\Omega_2, \partial\Omega_4) \geq \varepsilon$.

Für $0 < \delta_0 := \frac{3}{4}\kappa_1 \leq \varepsilon$ ist weiterhin $\Omega_1 \subset \{x \in \Omega_3 : S(\delta_0, x) \subset \Omega_3\} \subset \Omega_5$. Außerdem ist nach Konstruktion und Lemma A.6b)

$$(\Omega_5 \cap \Omega) + \text{cone}(\eta_j, \gamma_j, \min\{\rho_j, \frac{\kappa_1}{3}\}) \subset \Omega_3 \cap \Omega,$$

so daß (A.29) mit Lemma A.11 folgt. Durch sukzessives Anwenden von (A.29) ergibt sich

$$\begin{aligned}\overline{K}\left(\delta, f, s, r+s; L^p\left(\bigcup_{j=1}^n V_j^{\kappa/2}\right)\right) \\ \leq C\left(\sum_{j=1}^{n-1} \overline{K}(\delta, f, s, r+s; L^p(V_j^{\kappa/2-j\kappa_1})) + \overline{K}(\delta, f, s, r+s; L^p(V_n^{\kappa/2-(n-1)\kappa_1}))\right) \\ \leq C\sum_{j=1}^n \overline{K}(\delta, f, s, r+s; L^p(Q_j \cap \Omega)).\end{aligned}\tag{A.30}$$

Nach Lemma A.6c) ist

$$\Omega = \hat{\Omega}_{\frac{3}{4}\kappa} \cup \bigcup_{j=1}^n (Q_j^{\frac{3}{4}\kappa} \cap \Omega) = \hat{\Omega}_{\frac{3}{4}\kappa} \cup \bigcup_{j=1}^n V_j^{\frac{3}{4}\kappa}.$$

Es bleibt damit zu zeigen:

$$\begin{aligned}\overline{K}(\delta, f, s, r+s; L^p(\Omega)) &= \overline{K}\left(\delta, f, s, r+s; L^p\left(\hat{\Omega}_{\frac{3}{4}\kappa} \cup \bigcup_{j=1}^n V_j^{\frac{3}{4}\kappa}\right)\right) \\ &\leq C\left[\overline{K}\left(\delta, f, s, r+s; L^p\left(\bigcup_{j=1}^n V_j^{\kappa/2}\right)\right) + \overline{K}(\delta, f, s, r+s; L^p(\hat{\Omega}_\kappa))\right].\end{aligned}\tag{A.31}$$

Ist $\hat{\Omega}_\kappa$ oder $\hat{\Omega}_{\frac{3}{4}\kappa}$ leer, so ist die Aussage trivial, und der letzte Summand kann weglassen werden. Anderenfalls setzen wir in Lemma A.11 die Daten:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= \hat{\Omega}_{\frac{3}{4}\kappa}, & \Omega_2 &:= \bigcup_{j=1}^n Q_j^{\frac{3}{4}\kappa}, \\ \Omega_3 &:= \hat{\Omega}_\kappa, & \Omega_4 &:= \bigcup_{j=1}^n Q_j^{\kappa/2}, \\ \Omega_5 &:= \hat{\Omega}_{\frac{7}{8}\kappa}.\end{aligned}$$

Damit läßt sich in Lemma A.11 außerdem $\varepsilon = \frac{1}{4}\kappa$ und $\frac{1}{8}\kappa < \delta_0 < \frac{1}{4}\kappa$ wählen. Da Ω_3 und Ω_5 in Ω liegen, ist die Existenz des geforderten Kegels hier mit Radius $\rho < \frac{1}{8}\kappa$ trivial, und Lemma A.11 impliziert (A.31). Im Hinblick auf (A.30) und (A.31) ist das Lemma A.12 bewiesen. ■

A.4 Bramble-Hilbert-Lemma und äquivalente K-Funktionale

Die Argumente im vorangehenden Abschnitt funktionieren nur für das \overline{K} -Funktional, nicht für das K -Funktional, das seinerseits aber für die Abschätzung mit Steklov-Mitteln gegen den Stetigkeitsmodul (Lemma A.4) benutzt wird. Wir brauchen also einen Zusammenhang zwischen den beiden Funktionalen. Diesen liefert das Bramble-Hilbert-Lemma, das wir der Vollständigkeit halber in der hier benötigten Form beweisen. Zunächst einige Hilfsaussagen:

Lemma A.13 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine beschränkte, offene Menge, $s \in \mathbb{N}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^s(\overline{\Omega})$ gleichgradig beschränkt, d.h., es gibt eine Konstante C mit $\|f_n\|_{s, \overline{\Omega}} \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert zu jedem Kompaktum $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die in $C^{s-1}(\overline{\Omega}_0)$ konvergiert.*

Beweis Da Ω offen ist, existiert zu jedem $x \in \Omega$ eine Kugel $S(\delta_x, x) \subset \Omega$, die natürlich konvex ist und damit die Anwendung des Mittelwertsatzes gestattet: Zu $|\alpha| < s$ und beliebiger Folge $(n_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist $\|f_{n_j}^{(\alpha)}\|_{1, \overline{\Omega}} \leq C$ gleichgradig bezüglich j , so daß vermöge des Mittelwertsatzes $(f_{n_j}^{(\alpha)})_{j \in \mathbb{N}}$ im Punkt x gleichgradig stetig ist. Also ist $(f_{n_j}^{(\alpha)})_{j \in \mathbb{N}}$ auf Ω gleichgradig stetig und nach Voraussetzung gleichgradig beschränkt. Dies gilt auch für jedes Kompaktum $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$. Bezüglich $\overline{\Omega}_0$ ist der Satz von Arzelà-Ascoli (vgl. [54, S.563f]) anwendbar und liefert eine gleichmäßig konvergente Teilfolge von $(f_{n_j}^{(\alpha)})_{j \in \mathbb{N}}$ in der $\|\cdot\|_{C(\overline{\Omega}_0)}$ -Norm. Bilde nun sukzessive für alle $|\alpha| < s$ Teilfolgen, so daß schließlich eine (gemeinsame) Folge $(\tilde{n}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ entsteht, so daß $(f_{\tilde{n}_j}^{(\alpha)})_{j \in \mathbb{N}}$ für jedes $|\alpha| < s$ gleichmäßig auf $\overline{\Omega}_0$ konvergiert. ■

Lemma A.14 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine beschränkte, offene Menge, die die Kegelbedingung mit einem Kegel $\text{cone}(\eta, \gamma, \rho)$ erfüllt. In diesem Kegel ist dann eine Kugel mit Radius $d > 0$ enthalten. Wir legen die kompakte Menge Ω_0 fest über

$$\overline{\Omega}_0 := \overline{\{x \in \Omega : S(d/2, x) \subset \Omega\}}. \quad (\text{A.32})$$

Dann existiert eine Konstante C , so daß ($s \in \mathbb{N}$)

$$\|f\|_{s, \overline{\Omega}} \leq C [\|f\|_{s-1, \overline{\Omega}_0} + |f|_{s, \overline{\Omega}}] \quad \forall f \in C^s(\overline{\Omega}). \quad (\text{A.33})$$

Beweis Sei $x \in \Omega$. Dann existiert ein zu $\text{cone}(\eta, \gamma, \rho)$ kongruenter Kegel mit Scheitel x , der in Ω liegt. Sei y der Mittelpunkt der in diesem enthaltenen Kugel mit Radius d . Nach Definition von $\overline{\Omega}_0$ ist damit $y \in \overline{\Omega}_0$. Die x und y verbindende Strecke liegt im Kegel und damit in Ω . Taylor-Entwicklung um den Punkt y liefert für $|\alpha| < s$

$$f^{(\alpha)}(x) = \sum_{j=0}^{s-|\alpha|-1} \frac{1}{j!} \left[\sum_{k=1}^m (x_k - y_k) D^{e_k} \right]^j f^{(\alpha)}(y) + \frac{1}{(s-|\alpha|)!} \left[\sum_{k=1}^m (x_k - y_k) D^{e_k} \right]^{s-|\alpha|} f^{(\alpha)}(\xi)$$

für einen Punkt ξ auf der Strecke zwischen x und y . Beim Restglied werden nur Ableitungen der Ordnung s ausgewertet, so daß

$$\sum_{|\alpha| < s} |f^{(\alpha)}(x)| \leq C [\|f\|_{s-1, \overline{\Omega}_0} + |f|_{s, \overline{\Omega}}].$$

Dabei ist C von x unabhängig, da die Länge der Strecke zwischen x und y und damit $|x_k - y_k|$ durch ρ beschränkt ist. Da sich beim Übergang von Ω zu $\overline{\Omega}$ das Supremum einer stetigen Funktion nicht ändert, erhalten wir

$$\|f\|_{s-1, \overline{\Omega}} \leq C [\|f\|_{s-1, \overline{\Omega}_0} + |f|_{s, \overline{\Omega}}]$$

und damit

$$\|f\|_{s, \overline{\Omega}} \leq (C + 1) [\|f\|_{s-1, \overline{\Omega}_0} + |f|_{s, \overline{\Omega}}].$$

■

Lemma A.15 Die beschränkte, offene Menge Ω erfülle die Kegelbedingung. Dann existieren endlich viele nichtleere, offene, paarweise disjunkte, zusammenhängende Mengen G_1, \dots, G_{N_0} mit $\Omega = \bigcup_{j=1}^{N_0} G_j$. Außerdem ist $\overline{\Omega} = \bigcup_{j=1}^{N_0} \overline{G}_j$, wobei zwar auch die \overline{G}_j zusammenhängend, aber nicht unbedingt paarweise disjunkt sind.

Beweis Die Menge Ω läßt sich darstellen als Vereinigung ihrer Zusammenhangskomponenten (vgl. [38, S.112]). Es folgt sofort, daß diese offen (da Ω offen) und paarweise disjunkt sind. Nach Voraussetzung existiert ein Kegel $K = \text{cone}(\eta, \gamma, \rho)$, so daß es zu jedem Punkt $x \in \Omega$ einen zu K kongruenten Kegel $K_x \subset \Omega$ mit Scheitel x gibt.

Sei Ω' eine beliebige Zusammenhangskomponente und $x \in \Omega'$. Dann ist auch $\Omega' \cup K_x$ zusammenhängend und damit $K_x \subset \Omega'$. Also erfüllt Ω' die Kegelbedingung und

$$\text{meas}(\Omega') \geq \text{meas}(K_x) = \text{meas}(K) =: d > 0.$$

Gäbe es abzählbar-unendlich viele verschiedene Komponenten Ω_j , $j \in \mathbb{N}$, so wäre

$$\infty = \sum_{j \in \mathbb{N}} d \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \text{meas}(\Omega_j) = \text{meas} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Omega_j \right) = \text{meas}(\Omega) < \infty.$$

Also existieren nur endlich viele Komponenten G_1, \dots, G_{N_0} . Alle übrigen Aussagen sind damit unmittelbar klar. \blacksquare

Lemma A.16 *Die beschränkte, offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ erfülle die Kegelbedingung. Seien $1 \leq p < \infty$ und $s \in \mathbb{N}$ sowie G_1, \dots, G_{N_0} wie in Lemma A.15. Wir setzen*

$$\mathcal{P}'_{s-1}(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f|_{G_j} \in \mathcal{P}_{s-1}(G_j), 1 \leq j \leq N_0\},$$

$$\mathcal{P}'_{s-1}(\overline{\Omega}) := \{f \in C^{s-1}(\overline{\Omega}) : f|_{G_j} \in \mathcal{P}_{s-1}(G_j), 1 \leq j \leq N_0\}.$$

Damit ist¹ $\mathcal{P}'_{s-1}(\Omega) \subset W^{j,p}(\Omega)$, $j \in \mathbb{N}_0$ (vgl. (2.4)), und $\dim \mathcal{P}'_{s-1}(\Omega) = N_0 \dim \mathcal{P}_{s-1}(\mathbb{R}^m) = N_0 \binom{m+s-1}{s-1} =: N_1$ (vgl. (3.9)). Außerdem ist $\mathcal{P}'_{s-1}(\overline{\Omega}) \subset C^j(\overline{\Omega})$, $j \in \mathbb{N}_0$, und² $N_2 := \dim \mathcal{P}'_{s-1}(\overline{\Omega}) \leq N_1$. Sei jetzt je nach Wahl des Raumes $N = N_1$ oder $N = N_2$. Sei $\{\tilde{f}_1^*, \dots, \tilde{f}_N^*\}$ eine Basis von $(\mathcal{P}'_{s-1}(\Omega), \|\cdot\|_{s,p,\Omega})^*$ (bzw. von $(\mathcal{P}'_{s-1}(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{s,\overline{\Omega}})^*$). Dazu sei $\{f_1^*, \dots, f_N^*\} \subset (W^{s,p}(\Omega))^*$ (bzw. $\subset (C^s(\overline{\Omega}))^*$) eine (z.B. nach dem Satz von Hahn-Banach existierende) Fortsetzung dieser Basis. Dann sind die Normen $\|\cdot\|_{s,p,\Omega}$ und $\tilde{\|\cdot\|}_{s,p,\Omega}$ (bzw. $\|\cdot\|_{s,\overline{\Omega}}$ und $\tilde{\|\cdot\|}_{s,\overline{\Omega}}$) äquivalent. Dabei ist

$$\tilde{\|f\|}_{s,p,\Omega} := |f|_{s,p,\Omega} + \sum_{j=1}^N |f_j^*(f)|, \quad f \in W^{s,p}(\Omega), \quad (\text{A.34})$$

$$\tilde{\|f\|}_{s,\overline{\Omega}} := |f|_{s,\overline{\Omega}} + \sum_{j=1}^N |f_j^*(f)|, \quad f \in C^s(\overline{\Omega}). \quad (\text{A.35})$$

Beweis (vgl. [21, S.120, Beweis zu Theorem 14.1]) Wir beschränken uns wieder auf den L^p -Fall, weisen aber auf die Unterschiede zum sup-Norm-Fall hin.

Für $f \in W^{s,p}(\Omega)$ haben wir sofort

$$\tilde{\|f\|}_{s,p,\Omega} \leq |f|_{s,p,\Omega} + \sum_{j=1}^N \|f_j^*\|_{(W^{s,p}(\Omega))^*} \|f\|_{s,p,\Omega} \leq C \|f\|_{s,p,\Omega}, \quad (\text{A.36})$$

¹Da nicht gefordert ist, daß Ω ein LG-Gebiet ist, läßt sich Satz 2.9 nicht anwenden, so daß nichts über gleichmäßige Stetigkeit bekannt ist.

²Beachte, daß durch die lineare Nebenbedingung $f \in C^{s-1}(\overline{\Omega})$ in der Definition von $\mathcal{P}'_{s-1}(\overline{\Omega})$ gegebenenfalls die Anzahl der Freiheitsgrade gesenkt wird, vgl. Lemma A.15.

so daß die umgekehrte Ungleichung zu zeigen bleibt, d.h., wir zeigen jetzt, daß eine Konstante C existiert mit

$$\|f\|_{s,p,\Omega} \leq C \tilde{\|}f\|_{s,p,\Omega} \quad \forall f \in W^{s,p}(\Omega). \quad (\text{A.37})$$

Angenommen es existiert kein C , so daß (A.37) erfüllt ist. Dann gibt es zu $n \in \mathbb{N}$ ein $0 \neq \tilde{f}_n \in W^{s,p}(\Omega)$ mit

$$\|\tilde{f}_n\|_{s,p,\Omega} > n \tilde{\|}\tilde{f}_n\|_{s,p,\Omega}.$$

Für $f_n := \tilde{f}_n / \|\tilde{f}_n\|_{s,p,\Omega}$ gilt also

$$\|f_n\|_{s,p,\Omega} = 1, \quad (\text{A.38})$$

$$\tilde{\|}f_n\|_{s,p,\Omega} < 1/n. \quad (\text{A.39})$$

Da das beschränkte, offene Ω die Kegelbedingung erfüllt, ist nach Satz 2.10 der Raum $W^{s,p}(\Omega)$ in $W^{s-1,p}(\Omega)$ kompakt eingebettet. Wegen (A.38) existiert damit eine Teilfolge $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$f_{n_j} \rightarrow f_0 \text{ in } W^{s-1,p}(\Omega). \quad (\text{A.40})$$

Aber $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ ist auch Cauchy-Folge in $W^{s,p}(\Omega)$, da

$$\begin{aligned} \|f_{n_{j_1}} - f_{n_{j_2}}\|_{s,p,\Omega}^p &= \|f_{n_{j_1}} - f_{n_{j_2}}\|_{s-1,p,\Omega}^p + \|f_{n_{j_1}} - f_{n_{j_2}}\|_{s,p,\Omega}^p \\ &\leq \|f_{n_{j_1}} - f_{n_{j_2}}\|_{s-1,p,\Omega}^p + \tilde{\|}f_{n_{j_1}} - f_{n_{j_2}}\|_{s,p,\Omega}^p \\ &\stackrel{(\text{A.39})}{\leq} \|f_{n_{j_1}} - f_{n_{j_2}}\|_{s-1,p,\Omega}^p + \left(\frac{1}{n_{j_1}} + \frac{1}{n_{j_2}}\right)^p \stackrel{(\text{A.40})}{\rightarrow} 0 \quad (j_1, j_2 \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Also konvergiert $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ in $W^{s,p}(\Omega)$ gegen $f_0 \in W^{s,p}(\Omega)$. Im $C^s(\overline{\Omega})$ -Fall erhalten wir ebenfalls eine in $C^s(\overline{\Omega})$ konvergente Teilfolge. Allerdings folgt zunächst aus Lemma A.13 nur die Existenz einer Teilfolge $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}} \subset C^s(\overline{\Omega})$, die auf einem Kompaktum $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ eine gleichmäßige Cauchy-Folge bezüglich $C^{s-1}(\overline{\Omega}_0)$ ist (vgl. (A.40)). Wählen wir $\overline{\Omega}_0$ wie in (A.32), so ergibt sich aber auch jetzt:

$$\begin{aligned} \|f_{n_{j_1}} - f_{n_{j_2}}\|_{s,\overline{\Omega}} &\stackrel{(\text{A.33})}{\leq} C [\|f_{n_{j_1}} - f_{n_{j_2}}\|_{s-1,\overline{\Omega}_0} + \|f_{n_{j_1}} - f_{n_{j_2}}\|_{s,\overline{\Omega}}] \\ &\leq C [\|f_{n_{j_1}} - f_{n_{j_2}}\|_{s-1,\overline{\Omega}_0} + \tilde{\|}f_{n_{j_1}} - f_{n_{j_2}}\|_{s,\overline{\Omega}}]. \end{aligned}$$

Also (vgl. (A.39)) ist $(f_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $C^s(\overline{\Omega})$. Den verbleibenden Beweis führen wir wieder nur für den L^p -Fall: Da

$$\begin{aligned} \tilde{\|}f_0\|_{s,p,\Omega} &\leq \tilde{\|}f_0 - f_{n_j}\|_{s,p,\Omega} + \tilde{\|}f_{n_j}\|_{s,p,\Omega} \\ &\stackrel{(\text{A.36}), (\text{A.39})}{\leq} C \|f_0 - f_{n_j}\|_{s,p,\Omega} + \frac{1}{n_j} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

gilt

$$\tilde{\|}f_0\|_{s,p,\Omega} = 0. \quad (\text{A.41})$$

Insbesondere ist damit $|f_0|_{s,p,\Omega} = 0$. Für die zusammenhängenden Mengen G_j ($1 \leq j \leq N_0$) existiert somit ein Polynom $P_j f_0 \in \mathcal{P}_{s-1}(G_j)$, so daß $\|f_0 - P_j f_0\|_{s,p,G_j} = 0$ ist (vgl. [81, S.60], [58, S.104], [9, S.91ff]). Damit ist aber $f_0 \in \mathcal{P}'_{s-1}(\Omega)$. Wegen (A.41) ist außerdem $f_j^*(f_0) = 0$ für $1 \leq j \leq N$, und da die Funktionale f_j^* eine Basis von $(\mathcal{P}'_{s-1}(\Omega), \|\cdot\|_{s,p,\Omega})^*$ bilden, ist $f_0 \equiv 0$ in $W^{s,p}(\Omega)$. Andererseits ist aber im Widerspruch dazu

$$\|f_0\|_{s,p,\Omega} = \lim_{j \rightarrow \infty} \|f_{n_j}\|_{s,p,\Omega} \stackrel{(A.38)}{=} 1.$$

Somit ist also auch (A.37) bewiesen. \blacksquare

Folgerung A.17 (vgl. [7, 8]) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine beschränkte, offene Menge, die die Kegelbedingung erfüllt. Außerdem seien $s \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p < \infty$. Dann existiert eine Konstante C , so daß für jedes $f \in W^{s,p}(\Omega)$ gilt:

$$\inf_{g \in \mathcal{P}'_{s-1}(\Omega)} \|f - g\|_{s,p,\Omega} \leq C|f|_{s,p,\Omega}. \quad (\text{A.42})$$

Entsprechend gilt für Funktionen $f \in C^s(\overline{\Omega})$:

$$\inf_{g \in \mathcal{P}'_{s-1}(\overline{\Omega})} \|f - g\|_{s,\overline{\Omega}} \leq C|f|_{s,\overline{\Omega}}. \quad (\text{A.43})$$

Beweis Wir zeigen (A.42), entsprechend folgt (A.43). Seien f_1^*, \dots, f_N^* wie in Lemma A.16. Dann existiert zu $f \in W^{s,p}(\Omega)$ (genau) ein stückweises Polynom $Pf \in \mathcal{P}'_{s-1}(\Omega)$ mit $f_j^*(Pf) = f_j^*(f)$ für alle $1 \leq j \leq N$, denn die f_j^* bilden eine Basis von $(\mathcal{P}'_{s-1}(\Omega), \|\cdot\|_{s,p,\Omega})^*$. Sei $\{p_j : 1 \leq j \leq N\}$ die zu $\{f_j^*\}$ duale Basis in $\mathcal{P}'_{s-1}(\Omega)$, so ist $Pf = \sum_{j=1}^N f_j^*(f)p_j$. Damit haben wir:

$$\begin{aligned} \inf_{g \in \mathcal{P}'_{s-1}(\Omega)} \|f - g\|_{s,p,\Omega} &\leq \|f - Pf\|_{s,p,\Omega} \stackrel{\text{Lemma A.16}}{\leq} C\|f - Pf\|_{s,p,\Omega} \\ &\stackrel{(A.34)}{=} C|f - Pf|_{s,p,\Omega} = C|f|_{s,p,\Omega}. \end{aligned}$$

\blacksquare

Ist Ω zusätzlich zusammenhängend, so ist $\mathcal{P}'_{s-1}(\Omega) = \mathcal{P}_{s-1}(\Omega)$ und $\mathcal{P}'_{s-1}(\overline{\Omega}) = \mathcal{P}_{s-1}(\overline{\Omega})$, da es nur eine Zusammenhangskomponente gibt (vgl. Lemma A.15). Insbesondere folgt damit Satz 3.18. Mit Folgerung A.17 erreichen wir auch den gewünschten Übergang von \overline{K} zu K :

Folgerung A.18 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ eine beschränkte, offene Menge, die die Kegelbedingung erfüllt, $r, s \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Dann sind K - und \overline{K} -Funktional äquivalent, d.h., es existiert eine von δ und f unabhängige Konstante C , so daß für jedes $\delta > 0$, $f \in W^{s,p}(\Omega)$ bzw. $f \in C^s(\overline{\Omega})$ gilt:

$$\begin{aligned} K(\delta, f, s, r+s; L^p(\Omega)) &\leq \overline{K}(\delta, f, s, r+s; L^p(\Omega)) \\ &\leq CK(\delta, f, s, r+s; L^p(\Omega)), \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

$$\begin{aligned} K(\delta, f, s, r+s; C(\overline{\Omega})) &\leq \overline{K}(\delta, f, s, r+s; C(\overline{\Omega})) \\ &\leq CK(\delta, f, s, r+s; C(\overline{\Omega})). \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Beweis Die Äquivalenz (A.45) folgt analog zu (A.44), so daß wir uns wieder auf diesen Fall beschränken. Wegen $|f|_{s,p,\Omega} \leq \|f\|_{s,p,\Omega}$ ist die erste Ungleichung trivial. Wir schließen für beliebiges $g \in W^{r+s,p}(\Omega)$ und $v \in \mathcal{P}'_{s-1}(\Omega) \subset W^{r+s,p}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \overline{K}(\delta, f, s, r+s; L^p(\Omega)) &\leq \|f - g - v\|_{s,p,\Omega} + \delta|g + v|_{r+s,p,\Omega} \\ &= \|f - g - v\|_{s,p,\Omega} + \delta|g|_{r+s,p,\Omega}. \end{aligned}$$

Übergang zum Infimum bezüglich $v \in \mathcal{P}'_{s-1}(\Omega)$ ergibt:

$$\begin{aligned} \overline{K}(\delta, f, s, r+s; L^p(\Omega)) &\leq \inf_{v \in \mathcal{P}'_{s-1}(\Omega)} \|f - g - v\|_{s,p,\Omega} + \delta|g|_{r+s,p,\Omega} \\ &\stackrel{(A.42)}{\leq} C|f - g|_{s,p,\Omega} + \delta|g|_{r+s,p,\Omega} \\ &\leq \max\{1, C\} \left[|f - g|_{s,p,\Omega} + \delta|g|_{r+s,p,\Omega} \right]. \end{aligned}$$

Der Übergang zum Infimum über $g \in W^{r+s,p}(\Omega)$ auf der rechten Seite liefert die Behauptung. \blacksquare

Für $s = 0$ stimmen die Definitionen der K - und \overline{K} - Funktionale überein, so daß dieser Fall nicht extra berücksichtigt werden muß.

In [11, S.101] und [67, Kapitel A.4] wird eine entsprechende Aussage, motiviert durch Fehr [46, S.100], mittels geeigneter Taylor-Entwicklungen bewiesen. Dieser Ansatz läßt sich nur bei der Supremum-Norm durchführen. Für L^p -Räume wären die Entwicklungen entsprechend zu mitteln (vgl. [9, S.91ff]), so daß das Argument von Fehr nicht mehr funktioniert.

A.5 Beweis des Satzes

Beweis zu Satz A.1 Die linken Ungleichungen wurden bereits in Lemma A.2 gezeigt. Für die rechten betrachten wir wieder nur den L^p -Fall, da für die sup-Norm wieder alles analog gilt. Sei $f \in W^{s,p}(\Omega)$. Dann existiert nach (2.4) zu $\varepsilon > 0$ eine Funktion $f_\varepsilon \in C^s(\Omega) \cap W^{s,p}(\Omega)$ mit $\|f - f_\varepsilon\|_{s,p,\Omega} \leq \varepsilon$.

Nun folgt aus Lemma A.12 in den dortigen Bezeichnungen (vgl. Lemma A.6):

$$\begin{aligned} &\overline{K}(\delta^r, f_\varepsilon, s, r+s; L^p(\Omega)) \\ &\leq C \left(\sum_{j=1}^n \overline{K}(\delta^r, f_\varepsilon, s, r+s; L^p(Q_j \cap \Omega)) + \overline{K}(\delta^r, f_\varepsilon, s, r+s; L^p(\hat{\Omega}_\kappa)) \right). \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Wir setzen jetzt $\tilde{Q}_j := (Q_j \cap \Omega) + \text{cone}(\eta_j, \gamma_j, \rho_j/2)$. Da jeder dieser hinzuaddierten Kegel (mit Daten aus Lemma A.6) selbst der Kegelbedingung mit einem Kegel $\text{cone}(\eta_j, \tilde{\gamma}_j, \tilde{\rho}_j)$, $\tilde{\gamma}_j < \gamma_j$, $\tilde{\rho}_j < \rho_j/2$, genügt, erfüllt auch die offene Menge \tilde{Q}_j die Kegelbedingung mit diesem Kegel $\text{cone}(\eta_j, \tilde{\gamma}_j, \tilde{\rho}_j)$. Außerdem ist (vgl. Lemma A.6b))

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_j + \text{cone}(\eta_j, \gamma_j, \rho_j/2) &= (Q_j \cap \Omega) + \text{cone}(\eta_j, \gamma_j, \rho_j/2) + \text{cone}(\eta_j, \gamma_j, \rho_j/2) \\ &= (Q_j \cap \Omega) + \text{cone}(\eta_j, \gamma_j, \rho_j) \subset \Omega. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Entsprechend gehen wir von $\hat{\Omega}_\kappa$ zur Menge $\tilde{\Omega} := \hat{\Omega}_\kappa + \text{cone}(\eta, \gamma, \rho/2)$ über, wobei η und γ frei wählbar sind, für den Radius aber $\rho < \kappa_0 - \kappa$ gelte (vgl. Lemma A.6c)). Damit erfüllt also auch $\tilde{\Omega}$ die Kegelbedingung und $\tilde{\Omega} + \text{cone}(\eta, \gamma, \rho/2) \subset \Omega$. Wir erhalten zunächst mit Folgerung A.18:

$$\begin{aligned} & \overline{K}(\delta^r, f_\varepsilon, s, r+s; L^p(\Omega)) \\ & \stackrel{(A.46)}{\leq} C_1 \left(\sum_{j=1}^n \overline{K}(\delta^r, f_\varepsilon, s, r+s; L^p(\tilde{Q}_j)) + \overline{K}(\delta^r, f_\varepsilon, s, r+s; L^p(\tilde{\Omega})) \right) \\ & \stackrel{(A.44)}{\leq} C_2 \left(\sum_{j=1}^n K(\delta^r, f_\varepsilon, s, r+s; L^p(\tilde{Q}_j)) + K(\delta^r, f_\varepsilon, s, r+s; L^p(\tilde{\Omega})) \right). \end{aligned}$$

Damit liefert Lemma A.4 (beachte (A.47)):

$$\overline{K}(\delta^r, f_\varepsilon, s, r+s; L^p(\Omega)) \leq C\omega_r^{(s)}(\delta, f_\varepsilon, L^p(\Omega)). \quad (A.48)$$

Schließlich haben wir also

$$\begin{aligned} \overline{K}(\delta^r, f, s, r+s; L^p(\Omega)) & \leq \inf_{g \in W^{r+s}(\Omega)} (\|f - f_\varepsilon\|_{s,p,\Omega} + \|f_\varepsilon - g\|_{s,p,\Omega} + \delta^r |g|_{r+s,p,\Omega}) \\ & \leq \overline{K}(\delta^r, f_\varepsilon, s, r+s; L^p(\Omega)) + \varepsilon \\ & \stackrel{(A.48)}{\leq} C_1 \omega_r^{(s)}(\delta, f_\varepsilon, L^p(\Omega)) + \varepsilon \\ & \leq C_1 (\omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) + \omega_r^{(s)}(\delta, f_\varepsilon - f, L^p(\Omega))) + \varepsilon \\ & \leq C_1 (\omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) + C_2 |f_\varepsilon - f|_{s,p,\Omega}) + \varepsilon \\ & \leq C_1 \omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega)) + C_3 \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, ist der Satz bewiesen. ■

Anhang B

Eine Anfangs-Randwertaufgabe

Bisher haben wir in dieser Arbeit nur Randwertprobleme betrachtet. Aber auch für parabolische Differentialgleichungen, die als Anfangs-Randwertaufgaben formuliert sind, gibt es verschiedene Diskretisierungen, die auf der Finite-Elemente-Methode beruhen (siehe z.B. [91]). Dabei ist es allerdings üblich, das Finite-Elemente-Verfahren mit Differenzenverfahren zu kombinieren.

Wir diskutieren hier die Wärmeleitungsgleichung in einer abstrakten, schwachen Formulierung und diskretisieren zunächst nur die Ableitung nach der Zeit durch eine Rückwärtsdifferenz. Das daraus resultierende Rothe-Verfahren (Semi-Diskretisierung) wird z.B. ausführlich in [75] untersucht (vgl. [50, S.330]). Nach dem Beweis einer Fehlerschranke gegen einen τ -Modul zeigen wir hier deren Schärfe im Sinne von Gegenbeispielen. Dabei werden die zu Differenzenverfahren entwickelten Methoden eingesetzt (vgl. [44]). Danach betrachten wir eine Diskretisierung, bei der bezüglich der Ortsvariablen ein Finite-Elemente-Ansatz durchgeführt wird, während bezüglich der Zeitvariablen weiterhin Differenzen gebildet werden. Die Regularitätsvoraussetzungen an die Lösungen der Differentialgleichungen, insbesondere was Ableitungen nach der Zeitvariablen beim Zeitpunkt $t = 0$ betrifft, sind dabei allerdings recht stark, so daß die hier angeführten Betrachtungen nicht abschließend sein können.

Wir beginnen mit einigen Definitionen und Bezeichnungen. Seien im folgenden H und V reelle Hilbert-Räume mit den Skalarprodukten $(\cdot, \cdot)_H$ und $(\cdot, \cdot)_V$, so daß $V \subset_{\text{st}} H$ (ohne Einschränkung gelte $\|u\|_H \leq \|u\|_V$, $u \in V$). Außerdem sei $a(\cdot, \cdot)$ eine V -elliptische, beschränkte und symmetrische Bilinearform. Für einen Banach-Raum X sei ($s \in \mathbb{N}_0$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$)

$$C^s([a, b], X) := \{u : [a, b] \rightarrow X : u \text{ ist } s\text{-mal stark stetig differenzierbar}\}$$

($C([a, b], X) := C^0([a, b], X)$) mit Norm $\|u\|_{C^s([a, b], X)} := \sup_{t \in [a, b]} \left[\sum_{j=0}^s \|u^{(j)}(t)\|_X \right]$. Dabei entspricht der hier verwendete Differenzierbarkeitsbegriff den üblichen Ableitungen reellwertiger Funktionen, wenn der Betrag durch die Norm des Raums X ersetzt

wird: $\lim_{t \rightarrow t_0} \left\| \frac{u(t) - u(t_0)}{t - t_0} - u'(t_0) \right\|_X = 0$. Entsprechend sind Riemann-Integrale über X -wertige Funktionen definiert, und es gelten die üblichen Rechenregeln und insbesondere die Fundamentalsätze (siehe [66, S.298]), also z.B. für $u \in C^1([a, b], X)$:

$$\int_a^b u'(t) dt = u(b) - u(a) \in X.$$

Die Räume $C^s([a, b], X)$ sind Banach-Räume. Das läßt sich leicht nachrechnen, da X ein Banach-Raum ist. Für die angestrebten Fehlerschranken benötigen wir einen τ -Modul (vgl. [85, S.7]) für X -wertige Funktionen. Zu $r \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ sei

$$\tau_r(\delta, u, C([a, b], X)) := \int_a^b \left[\sup \{ \|\Delta_\nu^r u(y)\|_X : y, y + r\nu \in [t - \delta, t + \delta] \cap [a, b] \} \right] dt.$$

Man beachte, daß für Funktionen $u \in C([a, b], X)$ auch der Integrand stetig und damit das reell-wertige Riemann-Integral erklärt ist.

Ausgangspunkt ist das folgende schwache Problem (vgl. [50, S.295]): Sei $T > 0$. Gesucht ist eine Lösung $u \in C([0, T], V) \cap C^1([0, T], H)$ der Aufgabe

$$\begin{aligned} (u_t(t), v)_H + a(u(t), v) &= (f(t), v)_H \quad \forall v \in V, t \in [0, T] \\ u(0) &= v_0, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

mit der Inhomogenität $f : [0, T] \rightarrow H$ und dem Anfangswert $v_0 \in V$. Dabei schreiben wir u_t statt u' für die erste (starke) Ableitung (nach der Zeitvariablen t) und entsprechend u_{tt} für die zweite.

Für Lösbarkeitsfragen verweisen wir auf [61, Kapitel 2] und [75, Kapitel 11].

B.1 Eine Semi-Diskretisierung

Wir ersetzen nun die Zeitableitung durch eine Rückwärtsdifferenz. Dazu definieren wir für die Schrittweite $k > 0$ die äquidistante Zerlegung $Z_k := \{0, k, 2k, 3k, \dots\} \cap [0, T]$ und benutzen die Notation $\bar{\partial}_t u(t) := (u(t) - u(t - k))/k$. Nun ist eine Funktion $u_k : Z_k \rightarrow V$ gesucht, so daß

$$\begin{aligned} (\bar{\partial}_t u_k(t), v)_H + a(u_k(t), v) &= (f(t), v)_H \quad \forall v \in V, 0 < t \in Z_k \\ u_k(0) &= v_0. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Es folgt sofort die eindeutige Existenz der Lösung u_k , denn diese berechnet sich sukzessive vermöge

$$(u_k(t), v)_H + ka(u_k(t), v) = (u_k(t - k), v)_H + k(f(t), v)_H \quad \forall v \in V, 0 < t \in Z_k,$$

und mit

$$f_t^*(v) := (u_k(t - k) + kf(t), v)_H,$$

$$\hat{a}(v, w) := (v, w)_H + ka(v, w)$$

ergibt sich $u_k(t)$ aus $u_k(t - k)$ als Lösung von

$$\hat{a}(u_k(t), v) = f_t^*(v) \quad \forall v \in V. \quad (\text{B.3})$$

Da mit a aber auch \hat{a} eine symmetrische, koerzive und beschränkte Bilinearform ist, folgt die eindeutige Existenz einer Lösung von (B.3) mit dem Satz von Riesz oder dem Lemma von Lax und Milgram (Satz 2.35). Wir bemerken noch, daß wir die Inhomogenität $(f(t), \cdot)_H$ durch ein beliebiges beschränktes Funktional über V ersetzen können, ohne daß die eindeutige Lösbarkeit verlorengeht.

Durch [75, S.237ff] motiviert wird nun eine a-priori Abschätzung für den Fehler $u - u_k$ hergeleitet.

Satz B.1 *Sei $u \in C([0, T], V) \cap C^1([0, T], H)$ eine Lösung der Aufgabe (B.1), und sei u_k Lösung der zugehörigen halbdiskreten Aufgabe (B.2). Dann gilt für jedes $k > 0$:*

$$\max_{t \in Z_k} \|u(t) - u_k(t)\|_H = \max_{0 \leq j \leq T/k} \|u(jk) - u_k(jk)\|_H \leq \tau_1(k, u_t, C([0, T], H)). \quad (\text{B.4})$$

Wegen der (gleichmäßigen) Stetigkeit von u_t ist also $\lim_{k \rightarrow 0+} \max_{t \in Z_k} \|u(t) - u_k(t)\|_H = 0$.

Beweis Wir setzen für $0 \leq j \leq T/k$

$$e(jk) := u_k(jk) - u(jk)$$

und erhalten damit für $j \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \|e(jk)\|_H^2 &= \frac{1}{k} (e(jk), e(jk))_H \\ &= \frac{1}{k} (e(jk), e(jk) - e((j-1)k))_H + \frac{1}{k} (e(jk), e((j-1)k))_H \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

und weiterhin

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k} (e(jk), e(jk) - e((j-1)k))_H \\ &= \frac{1}{k} (e(jk), u_k(jk) - u_k((j-1)k))_H - \frac{1}{k} (e(jk), u(jk) - u((j-1)k))_H \\ &\stackrel{(\text{B.2})}{=} (e(jk), f(jk))_H - a(e(jk), u_k(jk)) - \frac{1}{k} (e(jk), u(jk) - u((j-1)k))_H \\ &= (e(jk), f(jk))_H - a(e(jk), u(jk)) + \underbrace{a(e(jk), u(jk) - u_k(jk))}_{= -e(jk)} - \\ &\quad \leq 0 \quad (a \text{ koerziv}) \\ &\quad - \frac{1}{k} (e(jk), u(jk) - u((j-1)k))_H \\ &\leq (e(jk), f(jk))_H - a(e(jk), u(jk)) - \frac{1}{k} (e(jk), u(jk) - u((j-1)k))_H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(B.1)}{=} \left(e(jk), u_t(jk) \right)_H - \frac{1}{k} \left(e(jk), u(jk) - u((j-1)k) \right)_H \\
& = \left(e(jk), u_t(jk) - \bar{\partial}_t u(jk) \right)_H \\
& \leq \|e(jk)\|_H \|u_t(jk) - \bar{\partial}_t u(jk)\|_H.
\end{aligned}$$

Das in (B.5) eingesetzt ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} \|e(jk)\|_H^2 & \leq \|e(jk)\|_H \|u_t(jk) - \bar{\partial}_t u(jk)\|_H + \frac{1}{k} \|e(jk)\|_H \|e((j-1)k)\|_H, \\
\|e(jk)\|_H & \leq k \|u_t(jk) - \bar{\partial}_t u(jk)\|_H + \|e((j-1)k)\|_H.
\end{aligned}$$

Wegen $u_k(0) = u(0) = v_0$ ist $e(0) = 0$, und damit folgt durch Iteration für $jk \leq T$:

$$\begin{aligned}
\|e(jk)\|_H & \leq k \sum_{l=1}^j \|u_t(lk) - \bar{\partial}_t u(lk)\|_H \\
& = k \sum_{l=1}^j \left\| u_t(lk) - \frac{1}{k} \int_{(l-1)k}^{lk} u_t(t) dt \right\|_H \\
& \leq \sum_{l=1}^j \int_{(l-1)k}^{lk} \|u_t(lk) - u_t(t)\|_H dt \\
& \leq \sum_{l=1}^j \int_{(l-1)k}^{lk} \left[\sup\{\|u_t(t_1) - u_t(t_2)\|_H : t_1, t_2 \in [t-k, t+k] \cap [0, T]\} \right] dt \\
& \stackrel{jk \leq T}{\leq} \int_0^T \left[\sup\{\|u_t(t_1) - u_t(t_2)\|_H : t_1, t_2 \in [t-k, t+k] \cap [0, T]\} \right] dt \\
& = \tau_1(k, u_t, C([0, T], H)). \tag{B.6}
\end{aligned}$$

■

Wählt man statt einer Rückwärtsdifferenz eine Crank-Nicolson-Diskretisierung (vgl. [91, S.14]), so läßt sich der Fehler gegen den Modul $\tau_2(k, u_t, C([0, T], H))$ in ähnlicher Weise abschätzen, so daß die Ordnung k^2 erzielt werden kann (vgl. auch [42]).

Die Schärfe von Satz B.1 läßt sich wieder mit dem quantitativen Resonanzprinzip Satz 2.30 zeigen. Dabei stellen wir den Fehler über diskrete Green-Typ-Funktionen dar, was sich insbesondere auch im Fall $\omega(\delta) = \delta$ auszahlt. Wir beginnen mit einigen Hilfsaussagen. Zunächst existiert zu $a(\cdot, \cdot)$ eine Eigenfunktion $\Psi \in V$, $\Psi \neq 0$, zu einem (reellen) positiven Eigenwert $\lambda > 0$, d.h.,

$$a(\Psi, v) = \lambda(\Psi, v) \quad \forall v \in V. \tag{B.7}$$

Da die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ beschränkt und koerziv ist, wird nämlich durch $\|u\|_a := a(u, u)^{1/2}$ eine zu $\|\cdot\|_V$ äquivalente Norm auf V festgelegt, und $(V, a(\cdot, \cdot))$ ist ein Hilbert-Raum. Zu $f \in V$ ist $f^*(\cdot) := (f, \cdot)_H \in (V, (\cdot, \cdot)_V)^* \cong (V, a(\cdot, \cdot))^*$, so daß nach dem Darstellungssatz von Riesz (bzw. Satz 2.35) über

$$a(Tf, v) = (f, v)_H \quad \forall f, v \in V$$

ein linearer Operator $T : V \rightarrow V$ definiert ist. Er ist beschränkt, da $(f, v \in V)$

$$\|Tf\|_a^2 = a(Tf, Tf) = (f, Tf)_H \leq \|f\|_H \|Tf\|_H \leq \|f\|_V \|Tf\|_V \leq C \|f\|_a \|Tf\|_a,$$

selbstadjungiert, da

$$a(Tf, v) = (f, v)_H = (v, f)_H = a(Tv, f) = a(f, Tv),$$

und positiv definit, da

$$a(Tf, f) = (f, f)_H = \|f\|_H^2 \stackrel{f \neq 0}{>} 0.$$

Erweitert man V in kanonischer Weise zu einem komplexen Hilbert-Raum und setzt T entsprechend fort, so besitzt T dann nur positive, reelle Eigenwerte, und das Spektrum ist nichtleer (siehe [66, S.225]). Daraus folgt auch die Existenz der Eigenfunktion Ψ für den reellen Raum V mit $T\Psi = \lambda^{-1}\Psi$, also

$$a(\Psi, v) = \lambda a(T\Psi, v) = \lambda(\Psi, v)_H \quad \forall v \in V.$$

Lemma B.2 Sei $\Psi \in V$ die Eigenfunktion zum Eigenwert λ aus (B.7). Weiter sei¹ $u(t) = g(t)\Psi$, $g \in C^1[0, T]$. Dazu sei u_k die zugehörige diskrete Lösung von (B.2). Dann gilt für alle $v \in V$:

a) Für $t \in [0, T]$ ist

$$(u_t(t), v)_H + a(u(t), v) = [g'(t) + \lambda g(t)](\Psi, v)_H. \quad (\text{B.8})$$

b) Auch u_k hat Produktgestalt $u_k(t) = g_k(t)\Psi$ mit $(jk \in Z_k)$

$$g_k(jk) = \frac{1}{1 + \lambda k} \left(k[g'(jk) + \lambda g(jk)] + g_k((j-1)k) \right), \quad g_k(0) = g(0). \quad (\text{B.9})$$

c) Für jede Funktion $w_k(t) = \tilde{g}_k(t)\Psi : Z_k \rightarrow V$ gilt ($j > 0, jk \in Z_k$)

$$(\overline{\partial}_t w_k(jk), v)_H + a(w_k(jk), v) = \hat{\partial}_t \tilde{g}_k(jk)(\Psi, v)_H \quad \forall v \in V, \quad (\text{B.10})$$

wobei wir die abkürzende Schreibweise

$$\hat{\partial}_t g(t) = \overline{\partial}_t g(t) + \lambda g(t) = \frac{g(t) - g(t-k)}{k} + \lambda g(t) \quad (\text{B.11})$$

benutzen.

¹Dann ist u Lösung der Aufgabe (B.7) mit der in Lemma B.2a) angegebenen Inhomogenität.

Beweis zu a)

$$(u_t(t), v)_H + a(u(t), v) = g'(t)(\Psi, v)_H + g(t)a(\Psi, v) \stackrel{(B.7)}{=} [g'(t) + \lambda g(t)](\Psi, v)_H.$$

zu c) Wir setzen w_k in die linke Seite von (B.2) ein und erhalten analog zu a) die Beziehung (B.10).

zu b) Wir zeigen, daß die zu $u_k(t) := g_k(t)\Psi$ definierte Funktion tatsächlich auch Lösung von (B.2) ist. Durch (B.9) ist g_k eindeutig festgelegt, und es gilt ($j \in \mathbb{N}$)

$$(1 + \lambda k)g_k(jk) - g_k((j-1)k) = k[g'(jk) + \lambda g(jk)],$$

also

$$\hat{\partial}_t g_k(jk) = \overline{\partial}_t g_k(jk) + \lambda g_k(jk) = g'(jk) + \lambda g(jk). \quad (B.12)$$

Damit folgt für alle $v \in V$, $j \in \mathbb{N}$, $jk \in Z_k$:

$$\begin{aligned} (f(jk), v)_H &\stackrel{(B.1)}{=} (u_t(jk), v)_H + a(u(jk), v) \stackrel{(B.8)}{=} [g'(jk) + \lambda g(jk)](\Psi, v)_H \\ &\stackrel{(B.12)}{=} \hat{\partial}_t g_k(jk)(\Psi, v)_H \stackrel{(B.10)}{=} (\overline{\partial}_t u_k(jk), v)_H + a(u_k(jk), v). \end{aligned}$$

Da auch $u_k(0) = g_k(0)\Psi = g(0)\Psi = u(0) = v_0$, ist das unter b) definierte u_k Lösung von (B.2). Wir erinnern uns noch an die eindeutige Lösbarkeit von (B.2), um den Beweis zu beenden. \blacksquare

Als nächstes definieren wir ein Analogon zur diskreten Green-Funktion bei Differenzenverfahren (vgl. (4.91)). Für Ψ aus (B.7) sei $G_k(t_1, t_2) : Z_k \times (Z_k \setminus \{0\}) \rightarrow V$ definiert als bei festem t_2 eindeutige Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} ([\overline{\partial}_t G_k(\cdot, t_2)](t), v)_H + a(G_k(t, t_2), v) &= \begin{cases} (\Psi, v)_H, & t = t_2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall v \in V, 0 < t \in Z_k, \\ G_k(0, t_2) &= 0. \end{aligned} \quad (B.13)$$

Existenz und Eindeutigkeit der eben definierten Funktion folgen wieder wie für die Lösung des Problems (B.2), wobei der Satz von Riesz sukzessive angewendet wird. Dieses Vorgehen liefert auch

$$G_k(t, jk) = 0 \quad \forall jk > t, jk \in Z_k \setminus \{0\}, t \in Z_k.$$

Lemma B.3 (vgl. (4.93)) Sei $w_k(t) := g_k(t)\Psi$, $w_k : Z_k \rightarrow V$, $w_k(0) = 0$ (d.h. $g_k(0) = 0$) mit Ψ und λ wie in (B.7). Dann besitzt w_k die Darstellung

$$w_k(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}, jk \leq t} G_k(t, jk)[\hat{\partial}_t g_k(jk)] = \sum_{j \in \mathbb{N}, jk \leq t} G_k(t, jk)[\overline{\partial}_t g_k(jk) + \lambda g_k(jk)]. \quad (B.14)$$

Beweis Wir bezeichnen die rechte Seite von (B.14) mit $r(t)$. Setzen wir sowohl $w_k(t)$ als auch $r(t)$ in die linke Seite von (B.2) ein, so erhalten wir Gleichheit:

$$\begin{aligned} (\overline{\partial}_t r(t), v)_H + a(r(t), v) &\stackrel{(B.13)}{=} \hat{\partial}_t g_k(t)(\Psi, v)_H \\ &\stackrel{(B.10)}{=} (\overline{\partial}_t w_k(t), v)_H + a(w_k(t), v) \quad \forall v \in V, 0 < t \in Z_k. \end{aligned}$$

Außerdem ist $r(0) = 0 = w_k(0)$, so daß die Behauptung aus der eindeutigen Lösbarkeit der Aufgabe (B.2) (bei Verwendung allgemeinerer Inhomogenitäten, vgl. Bemerkung vor Satz B.1) folgt. ■

Damit erhalten wir ein Analogon zu der für Schärfeuntersuchungen bei Differenzenverfahren in [42, 44] benutzten Fehlerdarstellung.

Lemma B.4 *Seien Ψ, u, u_k, g und g_k wie in Lemma B.2. Dann hat der Fehler $u - u_k$ die Darstellung ($t \in Z_k$)*

$$u(t) - u_k(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}, jk \leq t} G_k(t, jk) [\bar{\partial}_t g(jk) - g'(jk)]. \quad (\text{B.15})$$

Beweis Zunächst ist $u(0) - u_k(0) = 0$, so daß Lemma B.3 anwendbar ist ($t \in Z_k$):

$$\begin{aligned} u(t) - u_k(t) &\stackrel{(\text{B.14})}{=} \sum_{j \in \mathbb{N}, jk \leq t} G_k(t, jk) [\hat{\partial}_t g(jk) - \hat{\partial}_t g_k(jk)] \\ &\stackrel{(\text{B.12})}{=} \sum_{j \in \mathbb{N}, jk \leq t} G_k(t, jk) [\hat{\partial}_t g(jk) - g'(jk) - \lambda g(jk)] \\ &\stackrel{(\text{B.11})}{=} \sum_{j \in \mathbb{N}, jk \leq t} G_k(t, jk) [\bar{\partial}_t g(jk) - g'(jk)]. \end{aligned}$$

Als letzte Vorbereitung dient schließlich noch:

Lemma B.5 *Es ist*

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \max_{t \in Z_k} \left\| \sum_{j \in \mathbb{N}, jk \leq t} G_k(t, jk) \right\|_H \geq c > 0. \quad (\text{B.16})$$

Beweis Wir wählen in Lemma B.2 speziell $g(t) := \frac{1}{\lambda}[1 - \exp(-\lambda t)]$. Dann ist $g(0) = 0$ und somit auch $u(0) = u_k(0) = 0$. Außerdem ist $g'(t) + \lambda g(t) = 1$. Wegen (B.12) und (B.14) besitzt u_k die Form

$$u_k(t) = \sum_{j \in \mathbb{N}, jk \leq t} G_k(t, jk). \quad (\text{B.17})$$

Satz B.1 impliziert

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \max_{t \in Z_k} \|u(t) - u_k(t)\|_H = 0 \quad (\text{B.18})$$

und damit

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0^+} \max_{t \in Z_k} \left\| \sum_{j \in \mathbb{N}, jk \leq t} G_k(t, jk) \right\|_H &\stackrel{(\text{B.17})}{=} \lim_{k \rightarrow 0^+} \max_{t \in Z_k} \|u_k(t)\|_H \\ &\stackrel{(\text{B.18})}{=} \lim_{k \rightarrow 0^+} \max_{t \in Z_k} \|u(t)\|_H = \|u\|_{C([0, T], H)} = \frac{1}{\lambda} [1 - \exp(-\lambda T)] \|\Psi\|_H = c > 0. \end{aligned}$$

■

Satz B.6 Zu jedem abstrakten Stetigkeitsmodul ω existiert ein Gegenbeispiel $u_\omega \in C^1([0, T], V) \subset C([0, T], V) \cap C^1([0, T], H)$, das Lösung einer Aufgabe (B.1) ist, so daß $(\delta \rightarrow 0+, k \rightarrow 0+)$

$$\begin{aligned} \tau_1(\delta, (u_\omega)_t, C([0, T], H)) &= \mathcal{O}(\omega(\delta)) \\ \max_{t \in Z_k} \|u_\omega(t) - (u_\omega)_k(t)\|_H &\neq o(\omega(k)). \end{aligned}$$

Beweis Ist $\omega(\delta) = \delta$, so wählen wir konkret das Gegenbeispiel $u_\omega(t) = t^2\Psi$, wobei $\Psi \in V$ wie in (B.7) gewählt ist. Wir können Lemma B.4 anwenden ($t \in Z_k$):

$$\begin{aligned} u_\omega(t) - (u_\omega)_k(t) &= \sum_{j \in \mathbb{N}, jk \leq t} G_k(t, jk) \left(\frac{(jk)^2 - ((j-1)k)^2}{k} - 2jk \right) \\ &= -k \sum_{j \in \mathbb{N}, jk \leq t} G_k(t, jk). \end{aligned}$$

In Verbindung mit Lemma B.5 folgt damit die gewünschte Schärfeaussage

$$\max_{t \in Z_k} \|u_\omega(t) - (u_\omega)_k(t)\|_H \neq o(k),$$

während der Nachweis der Ordnung des τ -Moduls trivial ist.

Ist $\lim_{\delta \rightarrow 0+} \omega(\delta)/\delta = \infty$, so benutzen wir Satz 2.30 mit den Setzungen ($k = 1/n$)

$$X = C^1[0, T], \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{1,[0,T]}, \quad \varphi_n = 1/n = k, \quad \sigma(\delta) = \delta,$$

$$S_\delta g = \tau_1(\delta, g'\Psi, C([0, T], H)), \quad T_n g = \max_{t \in Z_k} \|(g\Psi)(t) - (g\Psi)_k(t)\|_H \quad (g \in C^1[0, T]),$$

$$g_n(t) = \frac{k}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{t}{k}\right).$$

Zunächst sind $T_n, S_\delta \in (C^1[0, T])^\sim$, da nach Satz B.1 gilt $T_n g \leq S_{1/n} g$ und $S_\delta g \leq 2T \|\Psi\|_H \|g\|_{1,[0,T]}$. Außerdem ist die Bedingung (2.27) erfüllt:

$$\|g_n\|_{1,[0,T]} \leq \frac{k}{2\pi} + 1 = \mathcal{O}(1) \quad (n \rightarrow \infty, \text{ d.h. } k \rightarrow 0+). \quad (\text{B.19})$$

Für die Jackson-Bernstein-Typ-Bedingung (2.28) gilt einerseits

$$S_\delta g_n \leq 2T \|\Psi\|_H \|g_n\|_{1,[0,T]} \stackrel{(\text{B.19})}{\leq} C$$

und andererseits

$$\begin{aligned} S_\delta g_n &= \int_0^T \left[\sup \left\{ \left\| \int_{t_2}^{t_1} (g_n)_{tt}(y) \Psi dy \right\|_H : t_1, t_2 \in [t - \delta, t + \delta] \cap [0, T] \right\} \right] dt \\ &= \|\Psi\|_H \int_0^T \left[\sup \left\{ \left| \int_{t_2}^{t_1} -\frac{2\pi}{k} \sin\left(2\pi \frac{y}{k}\right) dy \right| : t_1, t_2 \in [t - \delta, t + \delta] \cap [0, T] \right\} \right] dt \\ &\leq T \|\Psi\|_H 2\delta \frac{2\pi}{k} = C \frac{\delta}{k} = C \frac{\sigma(\delta)}{\varphi_n}. \end{aligned}$$

Es bleibt die Resonanzbedingung (2.29) zu überprüfen:

$$\begin{aligned}
T_n g_n &= \max_{t \in Z_k} \|(g_n \Psi)(t) - (g_n \Psi)_k(t)\|_H \\
&\stackrel{(B.15)}{=} \max_{t \in Z_k} \left\| \sum_{j \in \mathbb{N}, jk \leq t} G_k(t, jk) \left[\overline{\partial}_t \left(\frac{k}{2\pi} \sin \left(2\pi \frac{jk}{k} \right) \right) - \cos \left(2\pi \frac{jk}{k} \right) \right] \right\|_H \\
&= \max_{t \in Z_k} \left\| \sum_{j \in \mathbb{N}, jk \leq t} G_k(t, jk) \right\|_H.
\end{aligned}$$

Damit folgt schließlich

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} T_n g_n = \lim_{k \rightarrow 0+} \max_{t \in Z_k} \left\| \sum_{j \in \mathbb{N}, jk \leq t} G_k(t, jk) \right\|_H \stackrel{(B.16)}{\geq} c > 0.$$

Satz 2.30 liefert also ein Gegenbeispiel $g_\omega \in C^1[0, T]$, so daß $u_\omega := g_\omega \Psi$ die Aussagen des Satzes erfüllt. Außerdem beachte man im Hinblick auf (B.8), daß zu u_ω tatsächlich eine Inhomogenität der Form $(f_{u_\omega}(t), \cdot)_H$ gehört. ■

B.2 Eine volle Diskretisierung

Die Aufgabe (B.1) wird nun vollständig diskretisiert, indem das Rothe-Verfahren (B.2) auf endlich-dimensionalen Ansatzfunktionenräumen $\{V_h : h \in (0, 1]\} \subset V$ angewendet wird (vgl. [50, S.316], [91, S.12]). Dies führt zu der Aufgabe: *Gesucht ist eine Funktion $u_{k,h} : Z_k \rightarrow V_h$, so daß*

$$\begin{aligned}
(\overline{\partial}_t u_{k,h}(t), v)_H + a(u_{k,h}(t), v) &= (f(t), v)_H \quad \forall v \in V_h, 0 < t \in Z_k \quad (B.20) \\
a(u_{k,h}(0), v) &= a(v_0, v) \quad \forall v \in V_h.
\end{aligned}$$

Unter Benutzung der Ritz-Projektion P_h (siehe (2.57)) läßt sich die Anfangsbedingung auch schreiben als $u_{k,h}(0) = P_h v_0$. Auch diese Aufgabe ist eindeutig lösbar, da sich die Argumentation über den Darstellungssatz von Riesz zur Aufgabe (B.2) hier ebenfalls anwenden läßt, indem V durch den Hilbert-Raum V_h ersetzt wird. Die Fehlerabschätzung muß nun den zusätzlichen Approximationsfehler beim Übergang von V zu V_h berücksichtigen.

Satz B.7 (vgl. [91, S.12]) *Sei $u \in C^1([0, T], V)$ eine Lösung der Aufgabe (B.1), und sei $u_{k,h}$ Lösung der zugehörigen diskreten Aufgabe (B.20). Dann gilt für jedes $k > 0$ und $h \in (0, 1]$:*

$$\begin{aligned}
&\max_{t \in Z_k} \|u(t) - u_{k,h}(t)\|_H \\
&\leq \tau_1(k, u_t, C([0, T], H)) + 2 \int_0^T \|u_t(t) - P_h(u_t(t))\|_H dt + \|v_0 - P_h v_0\|_H. \quad (B.21)
\end{aligned}$$

Beweis Der Beweis verläuft parallel zum Beweis von Satz B.1, allerdings wird die exakte Lösung u durch ihre Ritz-Projektion $P_h u$ ersetzt:

$$u_{k,h}(t) - u(t) = [u_{k,h}(t) - P_h u(t)] + [P_h u(t) - u(t)] =: e_1(t) + e_2(t).$$

Wir setzen $e_1(t)$ in die linke Seite von (B.20) ein ($v \in V_h$, $0 < t \in Z_k$):

$$\begin{aligned} & \left(\overline{\partial}_t e_1(t), v \right)_H + a(e_1(t), v) \\ &= \left(\overline{\partial}_t u_{k,h}(t), v \right)_H + a(u_{k,h}(t), v) - \left(\overline{\partial}_t P_h u(t), v \right)_H - a(P_h u(t), v) \\ &\stackrel{(B.20)}{=} \left(f(t), v \right)_H - \left(\overline{\partial}_t P_h u(t), v \right)_H - a(P_h u(t), v) \\ &\stackrel{(B.1)}{=} \left(u_t(t), v \right)_H + a(u(t), v) - \left(\overline{\partial}_t P_h u(t), v \right)_H - a(P_h u(t), v) \\ &\stackrel{(2.57)}{=} \left(u_t(t), v \right)_H - \left(\overline{\partial}_t P_h u(t), v \right)_H \\ &= \left(u_t(t) - \overline{\partial}_t u(t), v \right)_H + \left(\overline{\partial}_t [u(t) - P_h u(t)], v \right)_H \\ &= \left(u_t(t) - \overline{\partial}_t u(t) - \overline{\partial}_t e_2(t), v \right)_H. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für² $v = e_1(t) \in V_h$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \left(e_1(t) - e_1(t-k), e_1(t) \right)_H &= \left(\overline{\partial}_t e_1(t), e_1(t) \right)_H \\ &= \left(u_t(t) - \overline{\partial}_t u(t) - \overline{\partial}_t e_2(t), e_1(t) \right)_H - \underbrace{a(e_1(t), e_1(t))}_{\geq 0} \\ &\leq \left(u_t(t) - \overline{\partial}_t u(t) - \overline{\partial}_t e_2(t), e_1(t) \right)_H, \end{aligned}$$

so daß

$$\frac{1}{k} \|e_1(t)\|_H^2 = \frac{1}{k} \left(e_1(t-k), e_1(t) \right)_H + \left(u_t(t) - \overline{\partial}_t u(t) - \overline{\partial}_t e_2(t), e_1(t) \right)_H,$$

$$\|e_1(t)\|_H \leq \|e_1(t-k)\|_H + k \|u_t(t) - \overline{\partial}_t u(t)\|_H + k \|\overline{\partial}_t e_2(t)\|_H.$$

Für $j \in \mathbb{N}$, $jk \in Z_k$, ergibt sich:

$$\|e_1(jk)\|_H \leq \underbrace{\|e_1(0)\|_H}_{=\|u_{k,h}(0) - P_h v_0\|_H=0} + k \sum_{l=1}^j \|u_t(lk) - \overline{\partial}_t u(lk)\|_H + k \sum_{l=1}^j \|\overline{\partial}_t e_2(lk)\|_H. \quad (\text{B.22})$$

Wie im Beweis zu Satz B.1 (siehe (B.6)) ist

$$k \sum_{l=1}^j \|u_t(lk) - \overline{\partial}_t u(lk)\|_H \leq \tau_1(k, u_t, C([0, T], H)). \quad (\text{B.23})$$

²Die Ritz-Projektion wird benutzt, damit diese Setzung möglich wird.

Da P_h stetig ist, gilt für die Funktion $u \in C^1([0, T], V)$, daß $(P_h u(t))_t = P_h(u_t(t))$ und $P_h(u_t(t)) \in C([0, T], V)$. Damit ist

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_t e_2(lk) &= \frac{1}{k} \int_{(l-1)k}^{lk} [(P_h u(t))_t - u_t(t)] dt = \frac{1}{k} \int_{(l-1)k}^{lk} [P_h(u_t(t)) - u_t(t)] dt, \\ k \sum_{l=1}^j \|\overline{\partial}_t e_2(lk)\|_H &\leq \int_0^T \|u_t(t) - P_h(u_t(t))\|_H dt. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Wir haben also für den Fehleranteil e_1 die Abschätzung

$$\|e_1(jk)\|_H \stackrel{(\text{B.22})-(\text{B.24})}{\leq} \tau_1(k, u_t, C([0, T], H)) + \int_0^T \|u_t(t) - P_h(u_t(t))\|_H dt$$

bewiesen. Es bleibt e_2 zu untersuchen:

$$\begin{aligned} \|e_2(t)\|_H &= \|P_h u(t) - u(t)\|_H = \left\| P_h u(0) - u(0) + \int_0^t P_h(u_t(y)) - u_t(y) dy \right\|_H \\ &\leq \|v_0 - P_h v_0\|_H + \int_0^T \|u_t(y) - P_h(u_t(y))\|_H dy. \end{aligned}$$

■

Die einzelnen Anteile der Fehlerschranke sind notwendig:

- Bei fest gewähltem Ansatzfunktionenraum V_h und Anfangswert $v_0 \in V_h$ entspricht die Aufgabe (B.20) einer Semi-Diskretisierung (B.2) des Problems (B.1), falls in (B.1) der Raum V durch V_h ersetzt wird. Insbesondere ist dann P_h die Identität. Von der Fehlerschranke (B.21) bleibt nur der τ -Modul, und die Schärfe dieses Anteils folgt mit Satz B.6. Bei dieser Argumentation benutzen wir, daß die Parameter h und k nicht gekoppelt sind und völlig unabhängig gegen 0 gehen dürfen. So können wir h festhalten und die Fehlerschranke nur in Abhängigkeit von k betrachten.
- Wählt man $u(t) = w$ bzw. $u(t) = tw$ für eine Funktion $w \in V$, $w \notin V_h$, $h \in (0, 1]$, so bleibt von der Fehlerschranke (B.21) nur noch $\|v_0 - P_h v_0\|_H = \|w - P_h w\|_H$ bzw. $2 \int_0^T \|w - P_h w\|_H dt = 2T \|w - P_h w\|_H$. Da der Fehler in diesen Fällen nicht verschwindet, sind neben dem τ -Modul beide weiteren Terme der Fehlerabschätzung nötig.

Wählt man konkrete Daten für die Räume H , V und V_h , so lassen sich die in Kapitel 3 hergeleiteten Fehlerschranken auf $v_0 - P_h v_0$ und $u_t(t) - P_h u_t(t)$ anwenden. Neben der vollen Diskretisierung (B.20) und der Semi-Diskretisierung (B.2) gibt es auch Verfahren, bei denen bezüglich des elliptischen Anteils Finite Elemente benutzt werden, die Zeitableitung aber nicht diskretisiert wird. Dieser Ansatz führt auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Hier gibt es Fehlerabschätzungen gegen die Ritz-Projektion der exakten Lösung (vgl. [91, S.5]), die ebenfalls mit den Ergebnissen aus Kapitel 3 zu intermediären Fehlerschranken ausgebaut werden können.

Symbolverzeichnis

\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{N}_0	$:= \mathbb{N} \cup \{0\}$
\mathbb{Z}, \mathbb{R}	Menge der ganzen Zahlen, der reellen Zahlen
$\mathbb{N}^m, \mathbb{N}_0^m, \mathbb{Z}^m, \mathbb{R}^m$	m -faches kartesisches Produkt von $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$
\mathcal{P}_r	$:= \{f \in C(\mathbb{R}^m) : f(x) = \sum_{ \alpha \leq r} C_\alpha x^\alpha, C_\alpha \in \mathbb{R}\}, 13$
\mathcal{P}^r	$:= \{f \in C(\mathbb{R}^m) : f(x) = \sum_{\alpha_j \leq r, 1 \leq j \leq m} C_\alpha x^\alpha, C_\alpha \in \mathbb{R}\}, 13$
$\mathcal{P}^{\text{Ser}}(\mathbb{R}^2)$	$:= \{f \in C(\mathbb{R}^2) : f(x) = \sum_{\substack{\alpha_j \leq 2, j=1,2 \\ \alpha \neq (2,2)}} C_\alpha x^\alpha, C_\alpha \in \mathbb{R}\}, 46$
\mathcal{P}_Λ	durch einen Λ -Bereich festgelegte Polynommenge, 21
$\mathcal{P}_r(\Omega)$	$:= \mathcal{P}_r _\Omega$, entsprechend: $\mathcal{P}^r(\Omega), \mathcal{P}_\Lambda(\Omega), \mathcal{P}^{\text{Ser}}(\Omega)$
$\mathcal{P}_{r,h}$	$:= \{z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : z _{(jh, (j+1)h)} \in \mathcal{P}_r(jh, (j+1)h), 0 \leq j \leq n-1\}$ mit $h = 1/n$, 133
$\mathcal{P}'_r(\Omega), \mathcal{P}'_r(\overline{\Omega})$	Mengen stückweiser Polynome, 172
$\mathbb{B}, \mathbb{B}_n, \mathbb{S}$	Indexmengen
m	Raumdimension
$ J $	Anzahl der Elemente der Menge J
$ \alpha $	Ordnung des Multiindex α , $ \alpha := \sum_{j=1}^m \alpha_j$, 12
x^α	$:= x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m}, x \in \mathbb{R}^m, \alpha \in \mathbb{N}_0^m$, 12
$\binom{\alpha}{\beta}$	$:= \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_m}{\beta_m}$, 12
$\alpha \leq \beta$	$\alpha_1 \leq \beta_1, \dots, \alpha_m \leq \beta_m$, 12
$\alpha < \beta$	$\alpha \leq \beta$ und $\alpha_j < \beta_j$ für mindestens eine Komponente, 12
$D^\alpha f = \frac{\partial^{ \alpha }}{\partial x^\alpha} f = f^{(\alpha)}$	partielle Ableitung von f , 12
$\text{Tr } f$	Träger der Funktion f
Ω	nichtleere, offene Menge, 12
$\text{dist}(x, \Omega)$	$:= \inf\{ x - y : y \in \Omega\}$, Abstand von x zur Menge Ω
$\text{dist}(\Omega_1, \Omega_2)$	$:= \inf\{ x - y : x \in \Omega_1, y \in \Omega_2\}$, Abstand der Mengen Ω_1 und Ω_2
$\text{diam } \Omega$	$:= \sup\{ x - y : x, y \in \Omega\}$, Durchmesser der Menge Ω , 47
$\rho(\Omega)$	$:= \sup\{\text{diam } B : B \text{ ist Kugel in } K\}$, 48
$\text{meas } \Omega$	Lebesgue-Maß der (meßbaren) Menge Ω , 48
$\partial\Omega$	Rand von Ω
$\text{int } \Omega$	Inneres von Ω
$\overline{\Omega}$	Abschließung von Ω

$\text{cone}(\eta, \gamma, \rho)$	Kegel mit Winkel γ zum Richtungsvektor η und Länge ρ , 14
$S(\delta, x)$	$:= \{y \in \mathbb{R}^m : x - y < \delta\}$, offene Kugel um x
$\overline{S}(\delta, x)$	$:= \{y \in \mathbb{R}^m : x - y \leq \delta\}$, abgeschlossene Kugel um x
\dim	Dimension eines linearen Raums
Δ	$:= \sum_{j=1}^m \partial^2 / \partial x_j^2$, Laplace-Operator
Δ_h, A_h	Differenzenoperatoren, 113
$\overline{\partial}_t u(t)$	$:= [u(t) - u(t - k)]/k$, 178
$\hat{\partial}_t u(t)$	$:= \overline{\partial}_t u(t) + \lambda u(t)$, 181
∇u	Gradient von u
Δ_ν^r	radiale Differenz, 20
$\Delta_\nu^\alpha, \Delta_l^\alpha$	gemischte Differenzen, 20
$\Omega(\nu)$	$:= \{x \in \Omega : x + t\nu \in \Omega, 0 \leq t \leq 1\}$, $\nu \in \mathbb{R}^m$, 20
$\Omega[\nu]$	$:= \{x \in \Omega : x + (t_1\nu_1, \dots, t_m\nu_m) \in \Omega, 0 \leq t_j \leq 1\}$, 20
$\omega_r(\delta, f, L^p(\Omega))$	$:= \sup\{\ \Delta_\nu^r f\ _{L^p(\Omega(r\nu))} : \nu \leq \delta\}$, r -ter Stetigkeitsmodul, 20
$\omega_r(\delta, f, C(\overline{\Omega}))$	$:= \sup\{\ \Delta_\nu^r f\ _{C(\overline{\Omega}(r\nu))} : \nu \leq \delta\}$, 20
$\omega_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega))$	$:= \sum_{ \beta =s} \omega_r(\delta, D^\beta f, L^p(\Omega))$, 21
$\omega_r^{(s)}(\delta, f, C(\overline{\Omega}))$	$:= \sum_{ \beta =s} \omega_r(\delta, D^\beta f, C(\overline{\Omega}))$, 21
$\overline{\omega}_\alpha(\delta, f, L^p(\Omega))$	$:= \sup\{\ \Delta_\nu^\alpha f\ _{L^p(\Omega[(\alpha_1\nu_1, \dots, \alpha_m\nu_m)])} : \nu_j \leq \delta\}$, 20
$\overline{\omega}_\alpha(\delta, f, C(\overline{\Omega}))$	$:= \sup\{\ \Delta_\nu^\alpha f\ _{C(\overline{\Omega}[(\alpha_1\nu_1, \dots, \alpha_m\nu_m)])} : \nu_j \leq \delta\}$, 20
$\overline{\omega}_r(\delta, f, L^p(\Omega))$	$:= \sum_{ \alpha =r} \overline{\omega}_\alpha(\delta, f, L^p(\Omega))$, 21
$\overline{\omega}_r(\delta, f, C(\overline{\Omega}))$	$:= \sum_{ \alpha =r} \overline{\omega}_\alpha(\delta, f, C(\overline{\Omega}))$, 21
$\overline{\omega}_r^{(s)}(\delta, f, L^p(\Omega))$	$:= \sum_{ \beta =s} \overline{\omega}_r(\delta, D^\beta f, L^p(\Omega))$, 21
$\overline{\omega}_r^{(s)}(\delta, f, C(\overline{\Omega}))$	$:= \sum_{ \beta =s} \overline{\omega}_r(\delta, D^\beta f, C(\overline{\Omega}))$, 21
$\omega_\Lambda(\delta, f, L^p(\Omega))$	$:= \sum_{\alpha \in \partial\Lambda} \overline{\omega}_\alpha(\delta, f, L^p(\Omega))$, Λ -Modul, 21
$\tau_r(\delta, f, (C[a, b], X))$	$:= \int_a^b [\sup\{\ \Delta_\nu^r f(y)\ _X : y, y + r\nu \in [t - \delta, t + \delta] \cap [a, b]\}] dt$, τ -Modul, 178
$C(\Omega)$	$:= \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : u \text{ ist stetig}\}$, 13
$C^s(\Omega)$	$:= \{u \in C(\Omega) : D^\alpha u = u^{(\alpha)} \in C(\Omega) \forall \alpha \leq s\}$, 12
$C(\overline{\Omega})$	linearer Raum der gleichmäßig stetigen, beschränkten $u \in C(\Omega)$, 13
$C^s(\overline{\Omega})$	linearer Raum der bis zur Ordnung s differenzierbaren $u \in C(\Omega)$ mit auf Ω gleichmäßig stetigen, beschränkten Ableitungen, 13
$\ u\ _{C(\overline{\Omega})}$	$:= \sup\{ u(x) : x \in \Omega\}$, 13
$ u _{\alpha, \overline{\Omega}}$	$:= \sup\{ D^\alpha u(x) : x \in \Omega\}$, 13
$ u _{s, \overline{\Omega}}$	$:= \sum_{ \alpha =s} u _{\alpha, \overline{\Omega}}$, 13
$\ u\ _{s, \overline{\Omega}}$	$:= \sum_{j=0}^s u _{j, \overline{\Omega}}$, 13
$C_0(\overline{\Omega})$	$:= \{u \in C(\overline{\Omega}) : u _{\partial\Omega} \equiv 0\}$, 13
$C_{00}^s(\Omega)$	$:= \{u \in C^s(\Omega) : \text{Tr } u \subset \Omega, \text{Tr } u \text{ kompakt}\}$, 13

$C^\infty(\Omega)$	$:= \bigcap_{j=0}^{\infty} C^j(\Omega)$, 13
$C_{00}^\infty(\Omega)$	$:= \bigcap_{j=0}^{\infty} C_{00}^j(\Omega)$, 13
$C^s([a, b], X)$	$:= \{u : [a, b] \rightarrow X : u \text{ ist } s\text{-mal stetig differenzierbar in der } X\text{-Norm}\}$, 177
$\ u\ _{C^s([a,b],X)}$	$:= \sup_{t \in [a,b]} \left[\sum_{j=0}^s \ u^{(j)}(t)\ _X \right]$, 177
$L^p(\Omega)$	Raum der zur p -ten Potenz Lebesgue-integrierbaren Funktionen auf Ω , 15
$\ u\ _{L^p(\Omega)}$	$:= \left[\int_{\Omega} u(x) ^p dx \right]^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$, 15
$\ u\ _{L^\infty(\Omega)}$	wesentliches Supremum von u , 15
$L_{\text{loc}}^1(\Omega)$	Menge der meßbaren, auf Ω lokal integrierbaren Funktionen, 15
$W^{s,p}(\Omega), W_0^{s,p}(\Omega)$	Sobolev-Räume der ganzzahligen Ordnung $s \in \mathbb{N}_0$, 16
$W^{s+\Theta,p}(\Omega)$	Sobolev-Räume fraktionierter Ordnung, $s \in \mathbb{N}_0$, $\Theta \in (0, 1)$, 19
$\ \cdot\ _{\nu,p,\Omega}, \cdot _{\nu,p,\Omega}$	zugehörige Normen und Halbnormen, $\nu \in \mathbb{R}$, $\nu \geq 0$, 16, 19
$\ \cdot\ _{-\nu,p,\Omega}$	negative Norm, 19
$(u, v)_{L^2(\Omega)}$	$:= \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$, Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$, 15
$(u, v)_{s,2,\Omega}$	$:= \sum_{ \alpha \leq s} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$, Skalarprodukt in $W^{s,2}(\Omega)$, 17
$(u_h, v_h)_h$	Skalarprodukt auf V_h^\sharp , 115
X^*	Dualraum von X
X^\sim	Raum der sublinearen, beschränkten, nicht-negativ-wertigen Funktionale über X , 22
$[X], [X, Y]$	Raum der linearen, beschränkten Abbildungen von X nach X , von X nach Y
$[X, U]_{\Theta,q}$	Interpolationsraum zwischen X und U , 29
$K(\delta, f, X, U)$	$:= K(\delta, f, (X, \ \cdot\ _X), (U, \cdot _U))$ $:= \inf\{\ f - g\ _X + \delta\ g\ _U : g \in U\}$, K-Funktional, 23
$K(\delta, f, s, r+s; L^p(\Omega))$	$:= K(\delta, f, (W^{s,p}(\Omega), \cdot _{s,p,\Omega}), (W^{r+s,p}(\Omega), \cdot _{r+s,p,\Omega}))$, 153
$K(\delta, f, s, r+s; C(\overline{\Omega}))$	$:= K(\delta, f, (C^s(\overline{\Omega}), \cdot _{s,\overline{\Omega}}), (C^{r+s}(\overline{\Omega}), \cdot _{r+s,\overline{\Omega}}))$, 153
$K(\delta, f, s, r+s-1, r+s; L^p(\Omega))$	$:= \inf_{g \in W^{r+s}(\Omega)} [\ f - g\ _{s,p,\Omega} + \delta^{r-1}\ g\ _{r+s-1,p,\Omega} + \delta^r\ g\ _{r+s,p,\Omega}]$, 153
$\overline{K}(\delta, f, s, r+s; L^p(\Omega))$	$:= K(\delta, f, (W^{s,p}(\Omega), \ \cdot\ _{s,p,\Omega}), (W^{r+s,p}(\Omega), \cdot _{r+s,p,\Omega}))$, 153
$\overline{K}(\delta, f, s, r+s; C(\overline{\Omega}))$	$:= K(\delta, f, (C^s(\overline{\Omega}), \ \cdot\ _{s,\overline{\Omega}}), (C^{r+s}(\overline{\Omega}), \cdot _{r+s,\overline{\Omega}}))$, 153
$\overline{K}(\delta, f, s, r+s-1, r+s; L^p(\Omega))$	$:= \inf_{g \in W^{r+s}(\Omega)} [\ f - g\ _{s,p,\Omega} + \delta^{r-1}\ g\ _{r+s-1,p,\Omega} + \delta^r\ g\ _{r+s,p,\Omega}]$, 153
$K_\Lambda(\delta, f, L^p(\Omega))$	K-Funktional zum Λ -Modul, 27
$\omega(\delta)$	abstrakter Stetigkeitsmodul, 30
$a(\cdot, \cdot)$	Bilinearform, 40, 72, 127
$\tilde{a}(\cdot, \cdot)$	abgeänderte Bilinearform, 73
u, u_h	u_h ist i.a. Finite-Elemente-Lösung zur exakten Lösung u

$P_h u$	Ritz-Projektion von u , für glatte u : $u_h = P_h u$, 36
$\tilde{P}_h u$	Ritz-Projektion zur Bilinearform $(\partial/\partial x_1 \cdot, \partial/\partial x_2 \cdot)_{L^2(\Omega)}$, 145
V_K	lokaler Ansatzfunktionenraum zum Finiten Element K , 42, 49
$V_h = V_h(r) \subset C_0(\overline{\Omega})$	Ansatzfunktionenraum, bestehend aus stückweisen Polynomen vom Grad $\leq r$, 49
\overline{V}_h	Ansatzfunktionenraum ohne Randbedingung, 51
V_h^\sharp	$:= \{y_h : \overline{\Omega}_h \rightarrow \mathbb{R}, y_h = 0 \text{ auf } \Gamma_h\}$, 113
$\mathcal{T}, \mathcal{T}_h$	Triangulierungen, 46
$\mathcal{M}_K = \mathcal{M}_{K,r}$	Interpolationspunkte eines Finiten Elements K , 43, 45, 46
$\Omega_h, \overline{\Omega}_h, \Gamma_h$	Gitter bzw. Knoten einer Triangulierung, Ω_h ist auch die Menge der Interpolationspunkte von $\Pi_{h,r}$, 50, 113
Z_k	Gitter bzgl. einer Zeitvariablen, 178
$G(x, y)$	Green-Funktion, 129
$G_h(\xi, \eta)$	diskrete Green-Funktion, 113
$G_k(t_1, t_2)$	diskrete Green-Funktion zu einem Anfangs-Randwertproblem, 182
$\varphi_{h,\eta}$	Basisfunktion des Ansatzfunktionenraums, 50
$\varphi_{K,\eta}$	lokale Basisfunktion, 50
Ψ	Eigenfunktion zur Bilinearform a , 180
$\Pi_{K,r}$	lokaler Interpolationsoperator, 44, 46, 46
$\Pi_{h,r}$	globaler Interpolationsoperator, 51
$\overline{\Pi}_{h,r}$	Quasi-Interpolationsoperator, 64
$E_{h,\eta,\nu}$	$:= \{x \in \Omega((r+1)\nu) : \text{Die Strecke } S \text{ zwischen } x \text{ und } x+(r+1)\nu \text{ schneidet den Rand mindestens eines } K \in \mathcal{T}_h \text{ und } \varphi_{h,\eta} \neq 0 \text{ auf } S\}$, 78
L_r	r -tes Legendre-Polynom, 144
$L_{r,j,h}$	auf $[jh, (j+1)h]$ transformiertes Legendre-Polynom, 145
$i j, i \nmid j$	i teilt j , i teilt nicht j
$\text{kgV}(i, j)$	kleinstes gemeinsames Vielfaches von i und j
\subset_{st}	stetig eingebettet
$ _\Omega$	Restriktion auf Ω
f.ü.	fast überall
\mathcal{O}, o	Landau-Symbole
\forall, \exists	für alle, es existiert
■	Beweisende

Index

- Λ -Bereich, 21
- τ -Modul, 178
- affin äquivalent, 53
- Ansatzfunktionenraum, 49
- Basisfunktion
 - Courant, 52
 - des Ansatzfunktionenraums, 50
 - lokale, 50
- Bilinearform
 - symmetrische, beschränkte, elliptische (koerzive), 35
 - zu einer elliptischen Differentialgleichung, 40
 - zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung, 127
- Differenz
 - gemischte, 20
 - radiale, 20
- Differenzenoperator
 - Fünf-Punkte, 113
 - Neun-Punkte, 126
 - Sieben-Punkte, 126
- Dirichlet-Randbedingung, 40
- elliptisch, 35
 - gleichmäßig, 39
- elliptische Projektion, 36
- Finites Element, 42
 - Bell-Dreieck, 98
 - Hermite, 50
 - isoparametrisches, 47
 - konformes, 50
 - Lagrange, 42
 - Rechteck, 45
 - Serendipity, 46
 - Simplex, 42
 - Tensor-Produkt, 45
- Freiheitsgrade, 42
- Funktional
 - sublineares, nicht-negativ-wertiges, beschränktes, 22
- Gauß-Punkte, 143
- Gebiet, 14
 - polygonal, 47
- Gitter, 113
 - gleichmäßig regulär, 48
- Green-Funktion, 74, 129
 - diskrete, 74, 93, 113, 129
- Hauptteil, 40
- Hölder-stetig, 13
- Interpolationsoperator
 - globaler, 51
 - lokaler, 44, 46
 - Quasi-, 63
- Interpolationsräume, 29
- K-Funktional, 23
 - zu Λ -Bereich, 27
- Kante, 43, 45
- Kegel, 14
- Kegelbedingung, 14
- Kemperman-Identität, 155
- koerziv, 35
- Legendre-Polynome, 144
- Lemma von
 - Aubin und Nitsche, 38

-
- Bramble und Hilbert, 59, 154, 174
 - Céa, 37
 - Lax und Milgram, 35
 - Lipschitz-Graph-Gebiet, 15, 162
 - polygonal, 47
 - Lipschitz-Rand, 14
 - Lipschitz-stetig, 13
 - Lobatto-Punkte, 143
 - Maximumprinzip, 113
 - Mixing-Bedingung
 - L^p , 87
 - ∞ , 84
 - negative Norm, 19
 - Nitsche-Trick, 38, 68, 72
 - Poisson-Gleichung, 73
 - pollution effect, 107
 - Prinzip gleichmäßiger Beschränktheit, 30
 - Rechteck-Eigenschaft, 15
 - Referenzelement, 52
 - Resonanzprinzip, 30
 - Ritz-Galerkin-Verfahren, 36
 - Ritz-Projektion, 36
 - Rothe-Verfahren, 177
 - Saturation, 26, 89
 - Satz von
 - Aronszajn und Smith, 165
 - Arzelà und Ascoli, 170
 - Banach und Steinhaus, 30
 - Butzer und Scherer, 32, 83
 - Gauß, 19
 - Haverkamp, 111
 - Johnen und Scherer, 24, 153
 - Meyers und Serrin, 17
 - Rellich und Kondrachov, 18
 - Sobolev, 17
 - scharf
 - asymptotisch, 8
 - auf der Klasse, 8
 - im Sinne eines Gegenbeispiels, 7, 90
 - im Sinne eines Umkehrsatzes, 76
 - schwache Ableitung, 16
 - Seite, 43, 45
 - Seitenrechteck, 45
 - Seitensimplex, 43
 - Sobolev-Räume, 16
 - fraktionierte, 19, 29
 - negative, 19
 - Spur-Operator, 18
 - Steklov-Mittel, 156
 - Stetigkeitsmodul
 - abstrakter, 30
 - gemischter, 20
 - radialer, 20
 - zu Λ -Bereich, 21
 - Superkonvergenz, 127
 - Teilung der Einheit, 136, 154, 165
 - Triangulierung, 46
 - gleichmäßig reguläre Familie, 48
 - reguläre Familie, 48
 - UBP, 30
 - Ungleichung von
 - Bernstein, 79
 - Gårding, 41
 - Kolmogoroff, 162, 164
 - Marchaud, 23, 160
 - Nikolskiĭ, 56
 - Poincaré, 17

Literaturverzeichnis

- [1] R.A. Adams: *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [2] H.W. Alt: *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, Berlin, 1992.
- [3] I. Babuška, A.K. Aziz: *Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method*. In: A.K. Aziz (ed.): *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*. Proc. Symposium Maryland 1972, Academic Press, New York, 1972, 3–359.
- [4] I. Babuška, R.B. Kellogg: *Nonuniform error estimates for the finite element method*. SIAM J. Numer. Anal. **12** (1975), 868–875.
- [5] M. Bakker: *One-dimensional Galerkin methods and superconvergence at interior nodal points*. SIAM J. Numer. Anal. **21** (1984), 101–110.
- [6] D. Braess: *Finite Elemente*. Springer, Berlin, 1992.
- [7] J.H. Bramble, S.R. Hilbert: *Estimation of linear functionals on Sobolev spaces with application to Fourier transforms and spline interpolation*. SIAM J. Numer. Anal. **7** (1970), 112–124.
- [8] J.H. Bramble, S.R. Hilbert: *Bounds for a class of linear functionals with applications to Hermite interpolation*. Numer. Math. **16** (1971), 362–369.
- [9] S.C. Brenner, L.R. Scott: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, Berlin, 1994.
- [10] Ju.A. Brudnyi: *Approximation of functions of n variables by quasipolynomials*. Math. USSR-Izv. **4** (1970), 568–586.
- [11] B. Büttgenbach: *Über die Schärfe von Fehlerabschätzungen bei der numerischen Lösung von Randwertproblemen durch Differenzenverfahren*. Dissertation, RWTH Aachen, 1990.
- [12] B. Büttgenbach, H. Esser, G. Lüttgens, R.J. Nessel: *A sharp error estimate for the numerical solution of a Dirichlet problem for the Poisson equation*. J. Comput. Appl. Math. **44** (1992), 331–337.

-
- [13] B. Büttgenbach, H. Esser, R.J. Nessel: *On the sharpness of error bounds in connection with finite difference schemes on uniform grids for boundary value problems of ordinary differential equations*. Numer. Funct. Anal. Optim. **12** (1991), 285–298.
- [14] B. Büttgenbach, H. Esser, R.J. Nessel: *Sharp error estimates for the numerical solution of boundary value problems of ordinary differential equations by finite difference schemes*. Atti. Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **41** (1993), 417–429.
- [15] B. Büttgenbach, H. Esser, R.J. Nessel: *On the comparison of error bounds for finite difference schemes*. Numer. Math. **64** (1993), 477–486.
- [16] B. Büttgenbach, R.J. Nessel, E. van Wickeren: *Sharp estimates in terms of moduli of smoothness for compound cubature rules*. Numer. Math. **56** (1989), 359–369.
- [17] P.L. Butzer, H. Berens: *Semi-Groups of Operators and Approximation*. Springer, Berlin, 1967.
- [18] P.L. Butzer, S. Jansche, R.L. Stens: *Functional analytic methods in the solution of the fundamental theorems on best weighted algebraic approximation*. In: G.A. Anastassiou (ed.): *Sixth Southeastern Approximation Theorists Annual Conference*. Proc. Conf. Memphis 1991, Marcel Dekker, New York, 1992, 151–205.
- [19] P.L. Butzer, K. Scherer, U. Westphal: *On the Banach-Steinhaus-theorem and approximation in locally convex spaces*. Acta Sci. Math. (Szeged) **34** (1973), 25–34.
- [20] P.G. Ciarlet: *Discrete variational Green's function, I*. Aequationes Math. **4** (1970), 74–82.
- [21] P.G. Ciarlet: *Basic error estimates for elliptic problems*. In: P.G. Ciarlet, J.L. Lions (eds.): *Handbook of Numerical Analysis, II*. North-Holland, Amsterdam, 1990, 5–196.
- [22] P.G. Ciarlet, R.S. Varga: *Discrete variational Green's function, II*. Numer. Math. **16** (1970), 115–128.
- [23] Ph. Clément: *Approximation by finite element functions using local regularization*. RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **9** (1975), 77–84.
- [24] W. Dahmen, R. DeVore, K. Scherer: *Multi-dimensional spline approximation*. SIAM J. Numer. Anal. **17** (1980), 380–402.
- [25] M. Dauge: *Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains*. Springer, Berlin, 1988.
- [26] O.V. Davydov: *On the condensation of values for sequences of seminorms*. Ukrainian Math. J. **44** (1992), 409–416.

- [27] R. DeVore, G. Lorentz: *Constructive Approximation*. Springer, Berlin, 1993.
- [28] R. DeVore, K. Scherer: *A constructive theory for approximation by splines with an arbitrary sequence of knot sets*. In: R. Schaback, K. Scherer (eds.): *Approximation Theory*. Proc. Colloquium Bonn 1976, Springer, Berlin, 1976, 167–183.
- [29] W. Dickmeis: *On quantitative condensation of singularities on sets of full measure*. *Approx. Theory Appl.* **1** (1985), 71–84.
- [30] W. Dickmeis, R.J. Nessel: *A unified approach to certain counterexamples in approximation theory in connection with a uniform boundedness principle with rates*. *J. Approx. Theory* **31** (1981), 161–174.
- [31] W. Dickmeis, R.J. Nessel: *Condensation principles with rates*. *Studia Math.* **75** (1982), 55–68.
- [32] W. Dickmeis, R.J. Nessel: *A quantitative condensation of singularities on arbitrary sets*. *J. Approx. Theory* **43** (1985), 383–393.
- [33] W. Dickmeis, R.J. Nessel, E. van Wickeren: *A general approach to counterexamples in numerical analysis*. *Numer. Math.* **43** (1984), 249–263.
- [34] W. Dickmeis, R.J. Nessel, E. van Wickeren: *Quantitative extensions of the uniform boundedness principle*. *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.* **89** (1987), 105–134.
- [35] J. Douglas, T. Dupont: *Some superconvergence results for Galerkin methods for the approximate solution of two point boundary value problems*. In: J.J.H. Miller (ed.): *Topics in Numerical Analysis*. Proc. Conf. Dublin 1972, Academic Press, New York, 1972, 89–92.
- [36] J. Douglas, T. Dupont: *Galerkin approximations for the two point boundary problem using continuous, piecewise polynomial spaces*. *Numer. Math.* **22** (1974), 99–109.
- [37] J. Douglas, T. Dupont, M.F. Wheeler: *An L^∞ -estimate and a superconvergence result for a Galerkin method for elliptic equations based on tensor products of piecewise polynomials*. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **8** (1974), 61–66.
- [38] J. Dugundji: *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1966.
- [39] T. Dupont, R. Scott: *Constructive polynomial approximation in Sobolev spaces*. In: C. de Boor, G. Golub (eds.): *Recent Advances in Numerical Analysis*. Proc. Symp. Madison, Wis., 1978, Academic Press, New York, 1978, 31–44.
- [40] T. Dupont, R. Scott: *Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces*. *Math. Comp.* **34** (1980), 441–463.

-
- [41] H. Esser: *Über Konvergenzordnungen diskreter Approximationen*. Habilitationsschrift, RWTH Aachen, 1974.
- [42] H. Esser, St.J. Goebbels, G. Lüttgens, R.J. Nessel: *Sharp error bounds for the Crank-Nicolson and Saul'yev difference scheme in connection with an initial boundary value problem for the inhomogeneous heat equation*. *Comput. Math. Appl.* **30** (1995), 59–68.
- [43] H. Esser, St.J. Goebbels, G. Lüttgens, R.J. Nessel: *On error bounds for finite difference schemes*. In: W. Müller, M. Felten, D.H. Mache (eds.): *Approximation Theory*. Proc. Conf. Dortmund 1995, Akademie Verlag, Berlin, 1995, 85–114.
- [44] H. Esser, St.J. Goebbels, R.J. Nessel: *On the sharpness of error bounds for the numerical solution of initial boundary value problems by finite difference schemes*. *Z. Anal. Anwendungen* **14** (1995), 347–367.
- [45] G. Fairweather: *Finite Element Galerkin Methods for Differential Equations*. Marcel Dekker, New York, 1978.
- [46] W. Fehr: *Über Konvergenzkriterien und Fehlerabschätzungen bei numerischer Differentiation*. Diplomarbeit, RWTH Aachen, 1991.
- [47] I. Fried: *On the optimality of the pointwise accuracy of the finite element solution*. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **15** (1980), 451–456.
- [48] St.J. Goebbels: *The sharpness of a pointwise error bound in connection with linear finite elements*. *Numer. Funct. Anal. Optim.* (1997), im Druck.
- [49] St.J. Goebbels: *On the sharpness of a superconvergence estimate in connection with one-dimensional Galerkin methods*. Zur Veröffentlichung eingereicht.
- [50] Ch. Großmann, H.-G. Roos: *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart, 1992.
- [51] W. Hackbusch: *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart, 1986.
- [52] R. Haverkamp: *Eine Aussage zur L_∞ -Stabilität und zur genauen Konvergenzordnung der H_0^1 -Projektionen*. *Numer. Math.* **44** (1984), 393–405.
- [53] H.-P. Helfrich: *Charakterisierung des K -Funktionals zwischen Hilberträumen und nichtuniforme Fehlerschranken*. *Bonner Math. Schriften* **89** (1976), 32–41.
- [54] H. Heuser: *Lehrbuch der Analysis, I*. Teubner, Stuttgart, 1989.
- [55] L. Imhof, R.J. Nessel: *The sharpness of a pointwise error bound for the Fejér-Hermite interpolation process on sets of positive measure*. *Appl. Math. Lett.* **7** (3) (1994), 57–62.

- [56] L. Imhof, R.J. Nessel: *A resonance principle with rates in connection with pointwise estimates for the approximation by interpolation processes*. Numer. Funct. Anal. Optim. **16** (1995), 139–152.
- [57] E. Isaacson, H.B. Keller: *Analyse numerischer Verfahren*. Verlag Harri Deutsch, Zürich, 1973.
- [58] L. Jantscher: *Distributionen*. de Gruyter, Berlin, 1971.
- [59] H. Johnen, K. Scherer: *On the equivalence of the K -functional and moduli of continuity and some applications*. In: W. Schempp, K. Zeller (eds.): *Constructive Theory of Functions of Several Variables*. Proc. Conf. Oberwolfach 1976, Springer, Berlin, 1977, 119–140.
- [60] C. Johnson: *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [61] J. Kačur: *Method of Lines in Evolution Equations*. Teubner, Leipzig, 1985.
- [62] M. Křížek: *Superconvergence results for linear triangular elements*. In: J. Vosmanský, H. Zlámal (eds.): *Equadiff 6*. Proc. Conf. Brno 1985, Springer, Berlin, 1986, 315–320.
- [63] M. Křížek, P. Neittaanmäki: *On superconvergence techniques*. Acta Appl. Math. **9** (1987), 175–198.
- [64] M. Křížek, P. Neittaanmäki: *Finite Element Approximation of Variational Problems and Applications*. Wiley, New York, 1990.
- [65] P. Lesaint, M. Zlámal: *Superconvergence of the gradient of finite element solutions*. RAIRO Modél. Math. Anal. Numér. **13** (1979), 136–166.
- [66] L.A. Ljusternik, W.I. Sobolev: *Elemente der Funktionalanalysis*. Harri Deutsch, Zürich, 1976.
- [67] G. Lüttgens: *Scharfe Fehlerabschätzungen für die numerische Approximation von Lösungen elliptischer Differentialgleichungen*. Dissertation, RWTH Aachen, 1993.
- [68] G. Lüttgens: *The comparison of two error estimates for approximate solutions of the Poisson equation*. Z. Anal. Anwendungen **13** (1994), 659–666.
- [69] D. Nasri-Roudsari, R.J. Nessel, R. Zeler: *Resonance principles with applications to mean ergodic theorems and projection operators*. Acta Math. Hungar. **64** (1995), 269–285.
- [70] P. Oswald: *On function spaces related to finite element approximation theory*. Z. Anal. Anwendungen **9** (1990), 43–64.

-
- [71] P. Oswald: *Multilevel Finite Element Approximation*. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [72] P.P. Petrushev, V.A. Popov: *Rational Approximation of Real Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [73] A. Peyerimhoff: *Gewöhnliche Differentialgleichungen, II*. Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1982.
- [74] R. Rannacher, R. Scott: *Some optimal error estimates for piecewise linear finite element approximations*. *Math. Comput.* **38** (1982), 437–445.
- [75] K. Rektorys: *The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations*. D. Reidel Publ. Comp., Dodrecht, 1982.
- [76] A.H. Schatz: *A weak discrete maximum principle and stability of the finite element method in L_∞ on plane polygonal domains*. *Math. Comp.* **34** (1980), 77–91.
- [77] A.H. Schatz, V. Thomée, W.L. Wendland: *Mathematical Theory of Finite and Boundary Element Methods*. Birkhäuser, Basel, 1990.
- [78] K. Scherer: *Characterization of generalized Lipschitz classes by best approximation with splines*. *SIAM J. Numer. Anal.* **11** (1974), 283–304.
- [79] K. Scherer: *Optimal degree of approximation by splines*. In: C.A. Micchelli, Th.J. Rivlin (eds.): *Optimal Estimation in Approximation Theory*. Proc. Symposium Freudenstadt 1976, Plenum, New York, 1977, 139–149.
- [80] L.L. Schumaker: *Spline Functions: Basic Theory*. Wiley, New York, 1981.
- [81] L. Schwartz: *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 1966.
- [82] R. Scott: *Optimal L^∞ estimates for the finite element method on irregular meshes*. *Math. Comp.* **30** (1976), 681–697.
- [83] R. Scott: *Applications of Banach space interpolation to finite element theory*. In: M.Z. Nashed (ed.): *Functional Analysis Methods in Numerical Analysis*. Proc. Conf. St. Louis 1977, Springer, Berlin, 1979, 298–318.
- [84] R. Scott, S. Zhang: *Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions*. *Math. Comp.* **54** (1990), 483–493.
- [85] Bl. Sendov, V.A. Popov: *The Averaged Moduli of Smoothness*. Wiley, New York, 1988.
- [86] R.C. Sharpley: *Cone conditions and the modulus of continuity*. In: Z. Ditzian, A. Meir, S.D. Riemenschneider, A. Sharma (eds.): *Approximation Theory*. Proc. Conf. Edmonton 1982, Canad. Math. Soc., Providence, RI., 1983, 341–351.

-
- [87] K.T. Smith: *Inequalities for formally positive integro-differential forms*. Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 368–370.
- [88] K.T. Smith: *Formulas to represent functions by their derivatives*. Math. Ann. **188** (1970), 53–77.
- [89] G. Strang, G. Fix: *An Analysis of the Finite Element Variational Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ., 1973.
- [90] G. Szegő: *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society, Providence, RI., 1967.
- [91] V. Thomée: *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems*. Springer, Berlin, 1984.
- [92] A.F. Timan: *Theory of Approximation of Functions of Real Variable*. Pergamon, Oxford, 1963.
- [93] L.B. Wahlbin: *Local behavior in finite element methods*. In: P.G. Ciarlet, J.L. Lions (eds.): *Handbook of Numerical Analysis, II*. North-Holland, Amsterdam, 1990, 353–522.
- [94] L.B. Wahlbin: *Superconvergence in Galerkin Finite Element Methods*. Springer, Berlin, 1995.
- [95] W. Walter: *Analysis, I/II*. Springer, Berlin, 1985/1990.
- [96] M.F. Wheeler: *An optimal L_∞ error estimate for Galerkin approximations to solutions of two-point boundary value problems*. SIAM J. Numer. Anal. **10** (1973), 914–917.
- [97] O. Widlund: *On best error bounds for approximation by piecewise polynomial functions*. Numer. Math. **27** (1977), 327–338.