



Konstruktion einiger Fensterfunktionen für die Fourier-Transformation

Steffen Goebbels

Technischer Bericht Nr. 2014-03

IMPRESSUM

Technische Berichte des Fachbereichs Elektrotechnik und Informatik,
Hochschule Niederrhein

ISSN 2199-031X

HERAUSGEBER

Christoph Dalitz und Steffen Goebbels
Fachbereich Elektrotechnik und Informatik

ANSCHRIFT

Hochschule Niederrhein
Reinarzstr. 49
47805 Krefeld

<http://www.hsnr.de/fb03/technische-berichte/>

Die Autoren machen diesen Bericht unter den Bedingungen der Creative Commons Attribution License (<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/de/>) öffentlich zugänglich. Diese erlaubt die uneingeschränkte Nutzung, Vervielfältigung und Verbreitung, vorausgesetzt Autor und Werk werden dabei genannt. Dieses Werk wird wie folgt zitiert:

S. Goebbels: „Konstruktion einiger Fensterfunktionen für die Fourier-Transformation.“ Technischer Bericht Nr. 2014-03, Hochschule Niederrhein, Fachbereich Elektrotechnik und Informatik, 2014

Errata zum technischen Bericht „Konstruktion einer Fensterfunktion für die Fourier-Transformation“

Steffen Goebbels, 11. September 2017

Ich danke allen Lesern, die mich auf Fehler hingewiesen haben.

| Seite | Position | gedruckt | korrekt |
|-------|-------------------------------|-------------|--|
| 3 | rechte Spalte, Mitte | $1_{[0,1]}$ | $1_{[-1,1]}$ |
| 4 | linke Spalte, letzte Zeile | $1_{[0,1]}$ | $1_{[-1,1]}$ |
| 4f | linke Spalte, vorletzte Zeile | a_m | Doppelbezeichnung: a_m wird sowohl als Koeffizient des trigonometrischen Polynoms (1) als auch als Parameter für den Sprung eingesetzt. Ab dieser Stelle bezeichnet a_m stets den Sprungparameter. |

Konstruktion einiger Fensterfunktionen für die Fourier-Transformation

Steffen Goebbels
Hochschule Niederrhein
Fachbereich Elektrotechnik und Informatik
Reinarzstr. 49, 47805 Krefeld
Steffen.Goebbels@hsnr.de

Zusammenfassung

In diesem Bericht wird eine Familie von Fensterfunktionen für die Fourier-Transformation betrachtet, die zwar schnell abfallende Nebenkeulen (Nebenextrema, „side lobes“) haben, aber eine große Energie in der Nähe der Hauptkeule („main lobe“) aufweisen. Die Fensterfunktionen eignen sich daher für den praktischen Einsatz auf einem festen Abtastintervall nur bedingt, sie können nah zusammen liegende Frequenzen nicht gut auflösen. Deshalb wird der vom Hamming-Fenster bekannte Ansatz der Überlagerung mit einem Rechteckfenster eingesetzt, um die Fenster so zu modifizieren, dass ihre Energie in der Nähe der Hauptkeule reduziert wird.

1 Einleitung

Für die Berechnung einer Fourier-Transformierten f^\wedge steht bei praktischen Anwendungen in der Regel nur ein beschränktes Intervall wie $[-1, 1]$ zur Verfügung, auf dem die zu transformierende Funktion f beobachtet werden kann. Außerhalb dieses Intervalls ersetzt man dann die Funktionswerte von f durch 0. Dadurch hat man es aber statt mit f mit der Funktion $f \cdot 1_{[-1,1]}$ zu tun, wobei die charakteristische Funktion $1_{[-1,1]}$ definiert ist über

$$1_{[-1,1]}(t) := \begin{cases} 1 & : t \in [-1, 1] \\ 0 & : t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]. \end{cases}$$

Nach dem Faltungssatz ist die Transformierte von $f \cdot 1_{[-1,1]}$ das $(2\pi)^{-1}$ -fache der Faltung von f^\wedge mit der Transformierten von $1_{[-1,1]}$, welche gleich $2 \operatorname{sinc}$ ist, siehe Abbildung 1. Dabei ist der Sinus-Cardinalis definiert über

$$\operatorname{sinc}(u) = \begin{cases} 1 & : u = 0 \\ \frac{\sin(u)}{u} & : u \neq 0. \end{cases}$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} (f \cdot 1_{[-1,1]})^\wedge(\omega) &= \frac{1}{2\pi} (f^\wedge * 2 \operatorname{sinc})(\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(u) 2 \operatorname{sinc}(\omega - u) du. \end{aligned}$$

Dies ist eine andere Funktion als f^\wedge .

Ein entsprechendes Problem hat man bei der Berechnung von Fourier-Koeffizienten einer periodischen Funktion, wenn die Periode nicht bekannt ist. Dann werden nur Werte eines angenommenen Periodenintervalls betrachtet, so dass eine andere Funktion analysiert wird, die über dieses Intervall hinaus periodisch mit der angenommenen Periode fortgesetzt ist. Durch die Fortsetzung entsteht außerdem in der Regel eine Sprungstelle, so dass beliebig hohe Frequenzen auftreten (Gibbs-Effekt), auch wenn die ursprüngliche Funktion bandbegrenzt ist, d. h., wenn nur Frequenzen in einem beschränkten Intervall vorliegen.

Um zu verstehen, wie sich das Verhalten im Frequenzbereich beeinflussen lässt, sehen wir uns die Faltung von f^\wedge mit $2 \operatorname{sinc}$ genauer an: Die Funktionswerte von f^\wedge werden mit der Gewichtsfunktion $2 \operatorname{sinc}$ gemittelt. Da $\operatorname{sinc}(t)$ eine „Hauptkeule“ bei $t = 0$ hat (siehe Abbildung 1), entsteht eine Näherung von $f^\wedge(\omega)$. Durch die Nebenkeulen gehen aber auch noch Funktionswerte von f^\wedge ein, die zu weit von ω entfernten Argumenten gehören. Die Abweichung von f^\wedge wird kleiner, wenn die Hauptkeule schmaler (und höher) wäre und die Amplituden und die Energien der Nebenkeulen kleiner wären. Dabei ist die Energie einer Nebenkeule definiert als das Integral über das Quadrat der Nebenkeule.

Optimal wäre die Delta-Distribution, die das neutra-

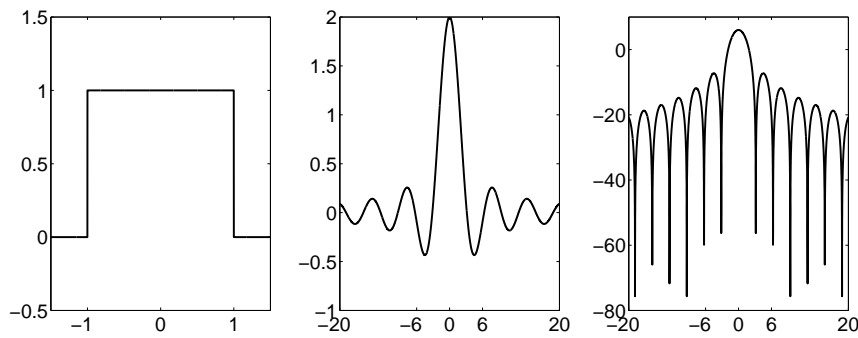


Abbildung 1: Links: Fensterfunktion $1_{[-1,1]}$, mitte: Transformierte $2 \operatorname{sinc}(\omega)$, rechts: Logarithmus der quadrierten Transformierten

le Element der Faltung ist. An dieser Stelle setzen Fensterfunktionen an (vgl. z. B. [5, Kap. 6.4.10]): Statt die Funktion f mit $1_{[-1,1]}$ zu multiplizieren, wird sie mit einer Fensterfunktion g multipliziert, die ebenfalls außerhalb des Intervalls $[-1, 1]$ null ist. Entsprechend wird f^\wedge mit g^\wedge gefaltet, so dass durch Wahl von g die Höhe der Haupt- und Nebenkeulen zumindest in gewissen Grenzen zu beeinflussen ist.

Fensterfunktionen werden auch bei der Analyse periodischer Funktionen unbekannter Periode eingesetzt, um die oben erwähnten Sprungstellen an den Intervallrändern zu verhindern. Hier ist dann die Faltung der Fourier-Koeffizienten der periodischen Funktion mit denen der Fensterfunktion zu betrachten. Wir konzentrieren uns hier aber auf die Fourier-Transformation nicht-periodischer Funktionen mittels Fensterfunktionen.

Bei der Wahl einer geeigneten Fensterfunktion müssen zwei sich widerstrebende Ziele in Einklang gebracht werden:

- Die ersten Nebenkeulen (nahe bei 0) sollen eine kleine Amplitude bzw. eine kleine Energie haben. Dadurch werden nah zusammen liegende Frequenzen bei der Faltung gut unterschieden. Diese Eigenschaft weist das Rechteckfenster $1_{[-1,1]}(t)$ auf.
- Die Amplituden (bzw. die Energie) der weiteren Nebenkeulen soll für $\omega \rightarrow \pm\infty$ möglichst schnell gegen null abfallen. So kann es durch die Faltung keine Verschmierung mit weit entfernten Frequenzen geben. Diese Eigenschaft ist in unterschiedlicher Ausprägung für die Fenster aus [4] erfüllt.

Wir übertragen in diesem Papier den vom Hamming-Fenster bekannten Ansatz durch Bilden einer Linearkombination des Rechteckfensters mit Fensterfunktionen aus [4], von denen eine zuvor in [3] beschrieben ist. Das Resultat ist für die Anwendung bei einem festen Abtastintervall besser geeignet als die Fenster aus [4]. Außerdem besitzt es eine vergleichsweise einfache Darstellung im Zeit- und Frequenzbereich. Allerdings gibt es Fenster, die ein besseres und sogar bestmögliches Verhältnis der Energie der Hauptkeule im Vergleich zu Nebenkeulen aufweisen, siehe [1] und die dort zitierte Literatur. Diese entstehen durch eine Konstruktion im Frequenzbereich. Im Zeitbereich wird mit der diskreten Rücktransformierten gerechnet. In der Praxis begnügt man sich allerdings häufig mit dem Hamming-Fenster, das auch im Zeitbereich einfach explizit anzugeben ist. Das Hamming-Fenster wie auch die Fenster aus [4] sind Vertreter der Kosinus-Summen-Fenster, deren Adaption und Optimierung in der Literatur ausführlich behandelt wird, vgl. [6] und [2]. In diesem Papier werden jedoch speziell die Fenster aus [4] mit sehr einfachen Mitteln für ein festes Abtastintervall angepasst.

2 Betrachtete Fensterfunktionen

In [4] wird für jeden ungeraden Parameter $m \in \mathbb{N}$ eine Fensterfunktion

$$g_m(t) := \begin{cases} \sum_{k=0}^m a_k \cos(\pi k t) & : -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & : |t| > 1, \end{cases} \quad (1)$$

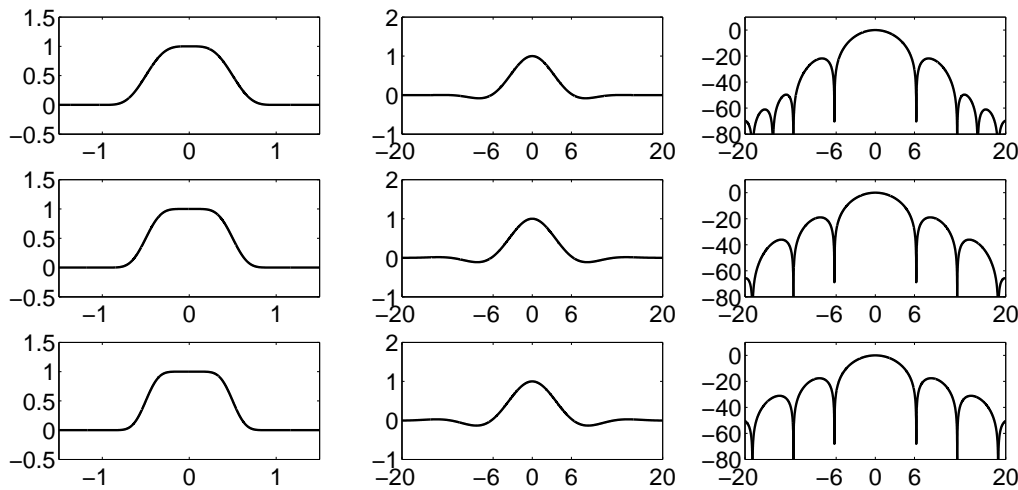


Abbildung 2: Links: Fensterfunktion g_m , mitte: Transformierte g_m^{\wedge} , rechts: Logarithmus der quadrierten Transformierten, erste Zeile: $m = 3$, zweite Zeile: $m = 5$, dritte Zeile: $m = 7$

mit Fourier-Transformierter

$$g_m^{\wedge}(\omega) = \sum_{k=0}^m a_k [\text{sinc}(k\pi + \omega) + \text{sinc}(k\pi - \omega)]$$

eingeführt, wobei die Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_m eindeutig durch $m + 1$ Gleichungen bestimmt sind:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m (-1)^k a_k &= 0, & \sum_{k=0}^m a_k &= 1, \\ \sum_{k=0}^m (-1)^k k^{2j} a_k &= 0 \quad \text{für } j \text{ mit } 1 \leq j \leq \frac{m-1}{2}, \\ \sum_{k=0}^m k^{2j} a_k &= 0 \quad \text{für } j \text{ mit } 1 \leq j \leq \frac{m-1}{2}. \end{aligned}$$

Konkret ergeben sich die Koeffizienten aus Tabelle 1. Die zugehörigen Funktionen und Transformierten sind in Abbildung 2 dargestellt. Deutlich ist an der logarithmischen Darstellung in der dritten Spalte zu erkennen, dass die Amplituden der Nebenkeulen im Vergleich zu anderen Fensterfunktionen schnell abfallen, aber die ersten Nebenkeulen vergleichsweise hoch sind. Die ersten Nebenkeulen spielen für die Anwendung in [4] keine Rolle, da dort das Verhalten für Abtastintervalle $[-R, R]$ bei $R \rightarrow \infty$ untersucht wird und sich dabei die Transformierte der Fensterfunktion um den Nullpunkt zusammenzieht. Bei festem Abtastintervall wirken sich aber auch die ersten Nebenkeulen aus.

3 Hamming-Ansatz

Das Hamming-Fenster (siehe Abbildung 3)

$$\begin{aligned} g_H(t) &:= \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos(\pi t) & : -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & : |t| > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0,08 + 0,92 \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) & : -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & : |t| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

entsteht aus dem \cos^2 - bzw. von Hann-Fenster

$$g_C(t) := \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(\pi t) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) & : -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & : |t| > 1, \end{cases}$$

indem eine Linearkombination mit der charakteristischen Funktion gebildet wird:

$$g_H(t) = 0,08 \cdot 1_{[0,1]} + 0,92 \cdot g_C(t).$$

Dabei nutzt man aus, dass die Hauptkeule der Transformierten $2\text{sinc}(\omega)$ von den Nullstellen bei $-\pi$ bis π reicht (siehe Abbildung 3). An diesen Stellen wechselt der Sinus-Cardinalis das Vorzeichen und ist auf $(-2\pi, -\pi)$ und $(\pi, 2\pi)$ negativ. Dann wechselt das Vorzeichen, so dass die Funktion auf $(-3\pi, -2\pi)$ und $(2\pi, 3\pi)$ wieder positiv ist. Die Transformierte des von

Tabelle 1: Koeffizienten der Fensterfunktionen

| m | a_0 | a_1 | a_2 | a_3 | a_4 | a_5 | a_6 | a_7 |
|-----|---------------|----------------|-------|-----------------|-------|--------|-------|----------|
| 3 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{9}{16}$ | 0 | $-\frac{1}{16}$ | | | | |
| 5 | 0,5 | 0,5859 | 0 | -0,0977 | 0 | 0,0117 | | |
| 7 | 0,5 | 0,5981 | 0 | -0,1196 | 0 | 0,0239 | 0 | -0,0024. |

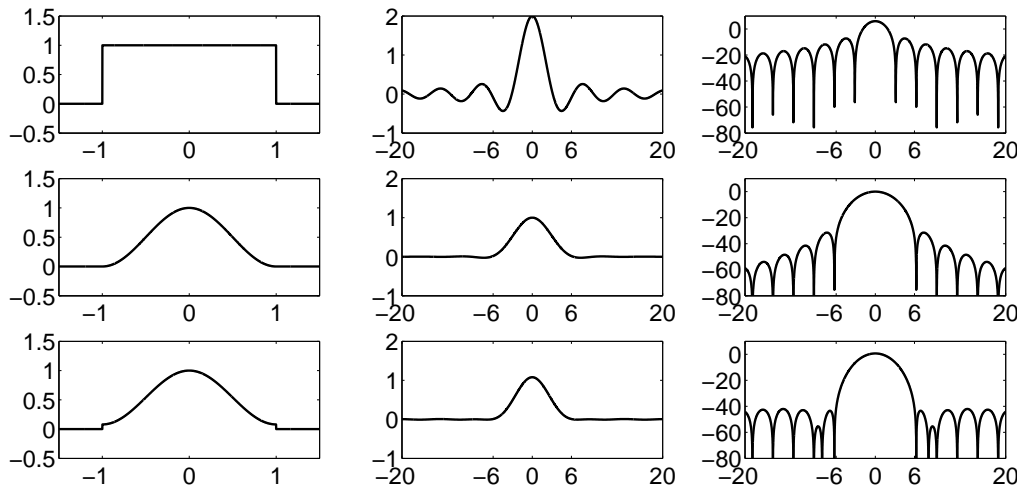


Abbildung 3: Links: Fensterfunktion, mitte: Transformierte, rechts: Logarithmus der quadrierten; erste Zeile: Rechteckfenster, zweite Zeile: von Hann-Fenster, dritte Zeile: Hamming-Fenster als Linearkombination der beiden anderen Fenster

Hann-Fensters dagegen ist auf $(-2\pi, 2\pi)$ positiv und auf $(-3\pi, -2\pi)$ und $(2\pi, 3\pi)$ negativ (siehe Abbildung 3). Aufgrund des unterschiedlichen Vorzeichens kommt es durch die Addition des Sinus-Cardinalis zu Auslöschungen auf $(-3\pi, -\pi)$ und $(\pi, 3\pi)$. Diesen Effekt macht man sich auch bei generalisierten Varianten des Hamming-Fensters zu Nutze, vgl. [7].

Die hier diskutierten Fensterfunktionen g_m aus (1) zeigen das gleiche Vorzeichenverhalten wie das von Hann-Fenster. Daher können wir durch eine Linearkombination mit dem Rechteckfenster ebenfalls Auslöschungen erreichen. Die Faktoren der Linearkombination müssen sich dabei zu eins addieren, da mit jeder einzelnen Fensterfunktion näherungsweise f^\wedge berechnet werden kann. Ergäbe die Summe der Faktoren eine andere Zahl c , dann würde $c \cdot f^\wedge(\omega)$ berechnet.

Wir wählen nun den Parameter a_m für die Fensterfunktion $(1 - a_m) \cdot 1_{[0,1]} + a_m \cdot g_m$ so, dass das Quadrat

der Transformierten im Intervall $(2\pi, 3\pi)$ neben der Hauptkeule möglichst klein wird, d. h. die „Energie“

$$\begin{aligned} & \int_{2\pi}^{3\pi} [(1 - a_m)2 \operatorname{sinc}(\omega) + a_m g_m^\wedge(\omega)]^2 d\omega \\ &= a_m^2 \int_{2\pi}^{3\pi} 4 \operatorname{sinc}^2(\omega) - 4 \operatorname{sinc}(\omega) g_m^\wedge(\omega) \\ & \quad + [g_m^\wedge(\omega)]^2 d\omega \\ & \quad + a_m \int_{2\pi}^{3\pi} -8 \operatorname{sinc}^2(\omega) + 4 \operatorname{sinc}(\omega) g_m^\wedge(\omega) d\omega \\ & \quad + \int_{2\pi}^{3\pi} 4 \operatorname{sinc}^2(\omega) d\omega \end{aligned}$$

soll minimal werden. Dazu benutzen wir die Differentialrechnung: Die Ableitung nach a_m muss 0 werden:

$$\begin{aligned} & 2a_m \int_{2\pi}^{3\pi} 4 \operatorname{sinc}^2(\omega) - 4 \operatorname{sinc}(\omega) g_m^\wedge(\omega) + [g_m^\wedge(\omega)]^2 d\omega \\ & + \int_{2\pi}^{3\pi} -8 \operatorname{sinc}^2(\omega) + 4 \operatorname{sinc}(\omega) g_m^\wedge(\omega) d\omega = 0, \end{aligned}$$

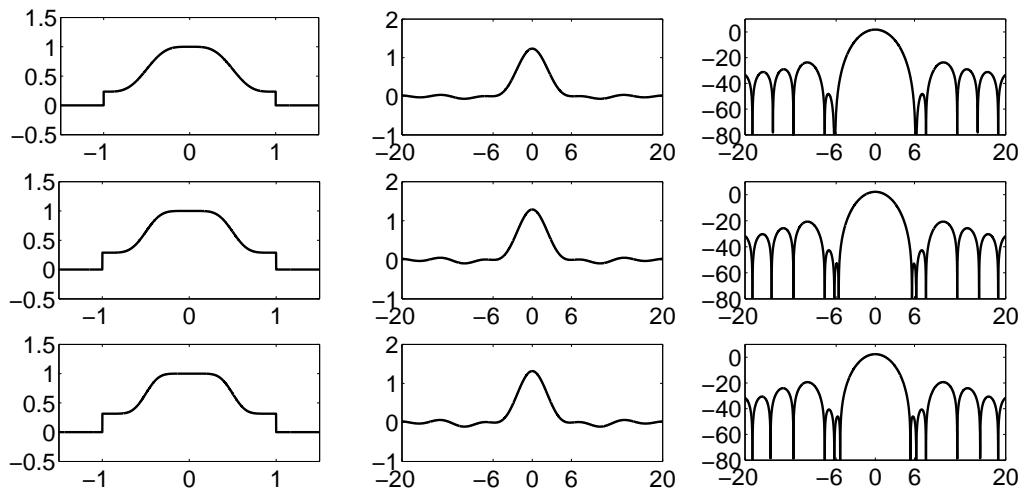


Abbildung 4: Linearkombination der Fensterfunktionen aus Abbildung 2 mit dem Rechteckfenster

4 Vergleich mit dem Hamming-Fenster

d. h., a_m ist gleich

$$\frac{\int_{2\pi}^{3\pi} 8 \operatorname{sinc}^2(\omega) - 4 \operatorname{sinc}(\omega) g_m^\wedge(\omega) d\omega}{2 \int_{2\pi}^{3\pi} 4 \operatorname{sinc}^2(\omega) - 4 \operatorname{sinc}(\omega) g_m^\wedge(\omega) + [g_m^\wedge(\omega)]^2 d\omega}$$

Die Integrale lassen sich numerisch lösen. Dabei erhalten wir näherungsweise

| | | | |
|-------|--------|--------|---------|
| m | 3 | 5 | 7 |
| a_m | 0,7660 | 0,7123 | 0,6844. |

Für die Parameter $m = 3, 5$ und 7 ist das Ergebnis der Linearkombination in Abbildung 4 dargestellt. Deutlich sind die Auslöschungen neben der Hauptkeule zu sehen. Dass mit wachsendem m das Fenster im dargestellten Intervall nicht besser wird, liegt daran, dass zwar die Nebenkeulen der Fensterfunktionen g_m mit wachsendem m für $\omega \rightarrow \pm\infty$ schneller klein werden, das Gegenteil aber für den Bereich der Hauptkeule zutrifft (siehe Abbildung 2).

Wird für das Integrationsintervall statt 3π eine größere obere Grenze $n\pi$ gewählt, dann wird a_m größer, das Fenster nähert sich g_m an.

Die Amplituden der Nebenkeulen fallen bei den hier konstruierten Fenstern nicht mehr so schnell ab wie bei den Funktionen aus [4]. Aber durch den kleinen Faktor vor der charakteristischen Funktion sind die absoluten Amplituden für $\omega \rightarrow \pm\infty$ doch deutlich kleiner als beim Rechteckfenster, jedoch höher als beim Hamming-Fenster.

Gegenüber dem Hamming-Fenster ist allerdings die Hauptkeule schmaler, so dass eine etwas bessere Trennung benachbarter Frequenzen zu erwarten ist, sofern sie ungefähr den Abstand der Breite der Hauptkeule haben (bessere Selektivität). Dazu betrachten wir die Funktion f mit der Transformierten $f^\wedge(\omega) = h^\wedge((\omega + \varepsilon)/\varepsilon) + h^\wedge((\omega - \varepsilon)/\varepsilon)$, wobei h^\wedge eine Dreiecksfunktion ist:

$$h^\wedge(\omega) = \begin{cases} \pi(1 - |\omega|) & : -1 \leq \omega \leq 1 \\ 0 & : \text{sonst,} \end{cases}$$

siehe für f^\wedge den ersten Graphen in Abbildung 5, wobei hier $\varepsilon = 3$ gewählt ist. Die Funktion f^\wedge hat Maxima bei $-\varepsilon$ und ε . Der zweite Graph in Abbildung 5 zeigt die Auflösung des Hamming-Fensters, der dritte Graph die des hier konstruierten Fensters für $m = 7$, wobei die beiden Frequenzmaxima besser erkannt werden.

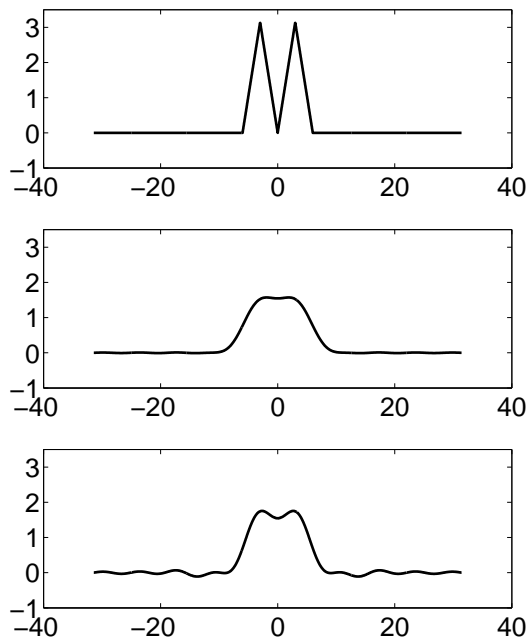


Abbildung 5: Anwendung des Hamming-Fensters (Mitte) und des Fensters zu $m = 7$ (unten) auf die Testfunktion f für $\varepsilon = 3$. Oben ist f^\wedge dargestellt, darunter die mit den beiden Fensterfunktionen berechneten Transformierten.

5 Schlussbemerkung

Das Hamming-Fenster entsteht aus dem von Hann-Fenster durch Linearkombination mit einem Rechteckfenster, wobei die Faktoren der Linearkombination so gewählt sind, dass es zu Auslöschungen neben der Hauptkeule kommt. Der Ansatz wurde in dieser Arbeit auf eine Klasse anderer Kosinus-Summen-Fenster übertragen, deren Nebenkeulen für $\omega \rightarrow \pm\infty$ schnell abfallen. Durch den elementaren Hamming-Ansatz wird die in [4] aus approximationstheoretischer Sicht eingeführte Klasse von Fensterfunktionen auch für praktische Anwendungen bei fester Fensterbreite einsetzbar. Im Vergleich mit dem Hamming-Fenster lässt sich zudem eine etwas schmalere Hauptkeule konstruieren, so dass Frequenzen besser unterschieden werden können, die ungefähr im Abstand der Breite der Hauptkeule liegen.

Literatur

- [1] J.W. Adams, “A New Optimal Window,” *IEEE Trans. Signal Processing* 39, S. 1753–1769, 1991.
- [2] H.-H. Albrecht: “A family of cosine-sum windows for high-resolution measurements,” in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*. Salt Lake City, UT, S. 3081–3084, 2013.
- [3] R. Bristow-Johnson, “A detailed analysis of a time-domain formant-corrected pitch shifting algorithm,” *J. Audio Eng. Soc.* 43, S. 340–352, 1995.
- [4] St. Goebbels, “A sharp error estimate for numerical Fourier transform of band-limited functions based on windowed samples,” *Z. Anal. Anwend.* 32, S. 1–17, 2013.
- [5] St. Goebbels und St. Ritter, *Mathematik verstehen und anwenden*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2013.
- [6] Nuttall, A.H., “Some windows with very good sidelobe behavior,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing* 29, S. 84–91, 1981.
- [7] R. J. Webster, “A generalized Hamming window,” *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing* 26, S. 176–177, 1978.