



Mathematik der Z-Transformation

Steffen Goebbels

Technischer Bericht Nr. 2014-02

IMPRESSUM

Technische Berichte des Fachbereichs Elektrotechnik und Informatik,
Hochschule Niederrhein

ISSN 2199-031X

HERAUSGEBER

Christoph Dalitz und Steffen Goebbels
Fachbereich Elektrotechnik und Informatik

ANSCHRIFT

Hochschule Niederrhein
Reinarzstr. 49
47805 Krefeld

<http://www.hsnr.de/fb03/technische-berichte/>

Die Autoren machen diesen Bericht unter den Bedingungen der Creative Commons Attribution License (<http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/de/>) öffentlich zugänglich. Diese erlaubt die uneingeschränkte Nutzung, Vervielfältigung und Verbreitung, vorausgesetzt Autor und Werk werden dabei genannt. Dieses Werk wird wie folgt zitiert:

S. Goebbels: „Mathematik der Z-Transformation.“ Technischer Bericht Nr. 2014-02,
Hochschule Niederrhein, Fachbereich Elektrotechnik und Informatik, 2014

Mathematik der Z-Transformation

Steffen Goebbels
Hochschule Niederrhein
Fachbereich Elektrotechnik und Informatik
Reinarzstr. 49, 47805 Krefeld
Steffen.Goebbels@hsnr.de

Zusammenfassung

Im Rahmen einer kurzen „Lecture Note“ werden mathematische Grundlagen der Z-Transformation erläutert. Da die Z-Transformation die Berechnung einer Potenzreihe ist, ergeben sich viele Eigenschaften der Z-Transformation direkt aus Sätzen der Funktionentheorie. Zur Charakterisierung der Stabilität linearer Abtastsystems wird darüber hinaus mit dem Prinzip gleichgradiger Beschränktheit ein zentrales Ergebnis der Funktionalanalysis verwendet, dessen Erwähnung an dieser Stelle in der Ingenieurliteratur eher unüblich ist.

1 Einleitung

Mit der Z-Transformation werden in der Regelungstechnik Differenzgleichungen gelöst, die beim Umgang mit abgetasteten Signalen auftreten. Daher wird diese Transformation ausführlich in der Ingenieurliteratur (z. B. [5, 11, 16]) und auch in spezialisierten Büchern über Ingenieurmathematik wie z. B. [1, 2, 4, 8, 12, 17] beschrieben. Aus der Fülle der Publikationen sind die angegebenen Werke nur exemplarisch herausgegriffen. Hier soll in einer im Vergleich mit den Büchern kompakteren Abhandlung der Fokus gezielt auf die Mathematik gelenkt werden, die im Umgang mit der Transformation benötigt wird. Diese wird so elementar wie möglich beschrieben, wobei aber die relevanten Sätze zur Z-Transformation vollständig bewiesen werden. Im Gegensatz zu den erwähnten Texten wird darüber hinaus der in der Regelungstechnik benutzte BIBO-Stabilitätsbegriff (siehe Definition 5.1) mit dem Prinzip gleichgradiger Beschränktheit der Funktionalanalysis umformuliert.

In der Regelungstechnik hilft die Laplace-Transformation, ein einfaches Regelwerk zur Lösung der auftretenden linearen Differenzgleichungen zu schaffen. Dabei wird mit Ein- und Ausgangssignalen gerechnet, die durch Funktionen beschrieben sind. Bei digitalen Regelungen hat man aber nicht die kompletten Funktionen, sondern nur Folgen von abgetasteten (diskreten) Funktionswerten zur Verfügung, also Ein- und Ausgangsfolgen. Die Zeitvariable der Funktion wird zum Index der Folge. Man betrachtet dann auch

keine Differenzial- sondern Differenzgleichungen, bei denen die Ableitungen durch Differenzenquotienten ersetzt sind.

Als erstes Beispiel dient ein System, das eine Verzögerung bewirkt. Unter System verstehen wir eine technisch realisierbare Abbildung, die eine Eingangsfolge $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ auf eine Ausgangsfolge $(y_k)_{k=0}^{\infty}$ abbildet. Im konkreten Beispiel sei $y_0 = 0$ und $y_k = x_{k-1}$ für $k \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Die Eingangsfolge wird also um genau einen Index verschoben (verzögert). Dabei ist $y_k = x_{k-1}$ bereits eine einfache Differenzgleichung, obwohl noch keine „echten“ Differenzen zu sehen sind.

- Einerseits lässt sich das Verhalten über die Faltung der Eingangsfolge mit der Folge $(0, 1, 0, 0, \dots)$ beschreiben. Dabei ist die **Faltung** „*“ zweier Folgen definiert über

$$(a_k)_{k=0}^{\infty} * (b_k)_{k=0}^{\infty} := \left(\sum_{n=0}^k a_{k-n} b_n \right)_{k=0}^{\infty}.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} &(x_0, x_1, x_2, \dots) * (0, 1, 0, 0, \dots) \\ &= (x_0 \cdot 0, x_1 \cdot 0 + x_0 \cdot 1, x_2 \cdot 0 + x_1 \cdot 1 + x_0 \cdot 0, \dots) \\ &= (0, x_0, x_1, x_2, \dots). \end{aligned}$$

Die Folge $(0, 1, 0, 0, \dots)$ tritt dabei als Antwort des Systems auf den Impuls $(1, 0, 0, \dots)$ auf. Wir werden mit Gleichung (12) auf Seite 12 sehen, dass dies ein allgemeines Prinzip ist.

- Andererseits überführt die im nächsten Abschnitt definierte Z-Transformation Ein- und Ausgangsfolgen, so dass die Transformierte der Ausgangsfunktion das Produkt einer „Übertragungsfunktion“ mit der Transformierten der Eingangsfunktion ist. Im Beispiel lautet die Übertragungsfunktion $G(z) = 1/z$, siehe (10) auf Seite 11. Aus der Faltung wird unter der Z-Transformation also ein Produkt – das ist völlig analog zur Fourier- und zur Laplace-Transformation. Werden mehrere Systeme miteinander kombiniert, kann deren Übertragungsfunktion vergleichsweise leicht aus den einzelnen Übertragungsfunktionen berechnet werden.

Ein geringfügig schwierigeres Beispiel ist durch die Differenzgleichung

$$y_k - 0,999 \cdot y_{k-1} = x_k - x_{k-1} \text{ für } k \in \mathbb{N} \quad (1)$$

mit $x_k = y_k = 0$ für $k < 0$ gegeben. Auf der rechten Seite ist eine erste Differenz der Eingangsfolge zu sehen. Die Differenzgleichung beschreibt ein digitales Filter, das mit fortschreitender Zeit den Gleichanteil eines Signals weg filtert und z. B. als Vorstufe bei der Spracherkennung verwendet wird. Wenn das Signal eine Schwingung ist, dann ist der Gleichanteil der Offset, um den geschwungen wird, siehe Abbildung 1. Nach Entfernung des Gleichanteils bleibt eine Schwingung um Null übrig. Bei einer Darstellung über eine Fourier-Reihe entspricht der Gleichanteil dem nullten Fourier-Koeffizienten. Lösungen erhalten wir einerseits wieder über die Faltung mit der Impulsantwort $(1, -0,001, 0,999 \cdot (-0,001), (0,999)^2 \cdot (-0,001), \dots)$, die wir durch iteratives Ausrechnen der Vorschrift $y_k = x_k - x_{k-1} + 0,999 \cdot y_{k-1}$ für $(x_k)_{k=0}^\infty = (1, 0, 0, \dots)$ erhalten, oder andererseits als Z-Transformierte, indem wir die Z-Transformierte der Eingangsfolge mit $(z - 1)/(z - 0,999)$ multiplizieren, siehe (11).

Im nächsten Abschnitt führen wir die Z-Transformation und ihre Umkehrtransformation über Potenzreihen ein. Den Rechenregeln, zu denen die wichtige Regel zur Verschiebung gehört, ist ebenfalls ein eigener Abschnitt gewidmet. Als Anwendungsgebiet für die Z-Transformation werden schließlich lineare zeitinvariante Abtastsysteme besprochen, hinter denen sich nichts Anderes als die bereits in der Einleitung beispielhaft behandelten Differenzgleichungen verbergen. Die Abtastsysteme werden mit Übertragungs-

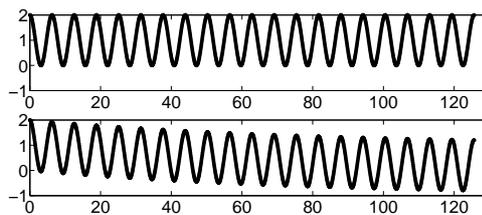


Abbildung 1: Oben: Abtastwerte von $\cos(x) + 1$, unten: Das Filter (1) entfernt den Gleichanteil +1.

funktionen beschrieben. Danach ist ein eigener Abschnitt der Stabilität von Abtastsystemen gewidmet. Zum Abschluss wird kurz der Begriff Frequenzgang als spezielle Sicht auf die Übertragungsfunktion eingeordnet.

2 Definition der Z-Transformation und ihrer Umkehrtransformation

Die Z-Transformation ist eine Transformation für Folgen, die bei der Anwendung auf Differenzgleichungen ähnliche Eigenschaften hat wie die Laplace-Transformation für Differentialgleichungen.

Die Laplace-Transformation ist für Funktionen $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert über

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}(f)](z) &:= \int_0^\infty f(t)e^{-z t} dt \\ &= \int_0^\infty f(t) \exp(-t \operatorname{Re}(z)) \cdot \\ &\quad \cdot [\cos(t \operatorname{Im}(z)) - j \sin(t \operatorname{Im}(z))] dt, \end{aligned}$$

sofern das Integral existiert. Dabei schreiben wir wegen der Nähe zur Regelungstechnik die imaginäre Einheit der komplexen Zahlen \mathbb{C} mit j und nicht mit i . Die vielleicht wichtigste Eigenschaft der Laplace-Transformation ist das Verhalten hinsichtlich Ableitungen:

$$[\mathcal{L}(f')](z) = z[\mathcal{L}(f)](z) - f(0).$$

Mit dieser Regel können lineare Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen ohne Ableitungen überführt und gelöst werden.

Die Z-Transformation, die in ihrer heutigen Form auf [13] zurückgeht, ist eine entsprechende Transformation für Folgen von Abtastwerten. Sie bildet eine Folge auf eine Funktion einer komplexen Variable ab und

verhält sich hinsichtlich Differenzen ähnlich wie die Laplace-Transformation hinsichtlich Ableitungen.

Ein naheliegender Ansatz, um aus einer Folge eine Funktion zu generieren, ist, die Folge als Koeffizienten einer Potenzreihe um den Entwicklungsmittelpunkt Null aufzufassen (Laurent-Reihe). Zur Folge $(a_k)_{k=0}^\infty$ diskutieren wir die Funktion $\sum_{k=0}^\infty a_k z^k$. Betrachten wir die um eine Position verschobene Folge $(0, a_0, a_1, \dots)$, dann erhalten wir dazu die transformierte

$$\sum_{k=1}^\infty a_{k-1} z^k = z \sum_{k=1}^\infty a_{k-1} z^{k-1} = z \sum_{k=0}^\infty a_k z^k.$$

Bei der Transformation ergibt sich also tatsächlich ein Vorfaktor, der aus der Variable besteht.

Die Menge der Werte für z , für die die Potenzreihe konvergiert, ist durch den Konvergenzradius ρ bestimmt. Die Reihe ist (absolut) konvergent für $|z| < \rho$ und divergent für $|z| > \rho$. Man hätte allerdings gerne, dass die Transformation insbesondere für $|z| \rightarrow \infty$ sinnvoll ist, um ein zur Laplace-Transformation analoges Verhalten zu haben. Daher setzt man $1/z$ in die Potenzreihe ein und erhält die Z-Transformation. Eine Verschiebung der Ausgangsfolge um eine Stelle führt damit zu einem Faktor $1/z$ (siehe (3) auf Seite 6), der auch das Rechnen mit Übertragungsfunktionen erlaubt, wie sie bei der Laplace-Transformation verwendet werden.

Die Z-Transformation lässt sich auch über die Diskretisierung der Laplace-Transformation motivieren (vgl. [3, S. 171]): Wenn wir nun nur Abtastwerte zu „Zeitpunkten“ $t = k\Delta t$ haben, dann können wir das Integral $[\mathcal{L}(f)](s) = \int_0^\infty f(t) \exp(-st) dt$ auch näherungsweise schreiben als Summe $\Delta t \sum_{k=0}^\infty f(k\Delta t) [\exp(s\Delta t)]^{-k}$. Ersetzen wir die komplexe Zahl $\exp(s\Delta t)$ kurz durch z und wählen wir $\Delta t = 1$, dann haben wir ebenfalls die Definition der Z-Transformation für die Folge $(f(0), f(1), f(2), \dots)$ vor uns.

Die Laplace-Transformation funktioniert für auf endlichen Intervallen integrierbare Funktionen $f: [0, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ von höchstens exponentiellem Wachstum, d. h. $|f(t)| \leq C \exp(s_0 t)$ für alle $t \geq 0$ mit reellen Konstanten $M, s_0 > 0$. Entsprechend betrachtet man für die Z-Transformation Folgen, die einer Wachstumsbedingung genügen:

Definition 2.1 (Z-Transformation) *Es sei eine Folge reeller Zahlen $(a_k)_{k=0}^\infty$ gegeben, die der Wachstumsbedingung*

$$|a_k| \leq M \alpha^k = M \exp(\ln(\alpha)k)$$

für von k unabhängige Konstanten M und $\alpha > 0$ genügt. Dieser Folge ordnet die (unilaterale) Z-Transformation Z eine Funktion $A(z)$ mit einer komplexen Variable z zu, die über die Reihe

$$A(z) := \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{1}{z^k}$$

definiert ist, d. h. $Z((a_k)_{k=0}^\infty)(z) = A(z)$. Der Definitionsbereich von A ist die Teilmenge von \mathbb{C} , auf der die Reihe konvergiert. Die Funktion A heißt die Z-Transformierte. Der Zusammenhang zwischen $(a_k)_{k=1}^\infty$ und $A(z)$ wird auch über die Notation $(a_k)_{k=1}^\infty \circ \bullet A(z)$ bzw. $A(z) \bullet \circ (a_k)_{k=1}^\infty$ dargestellt.

Man spricht von der unilateralen Z-Transformation, da die Summation bei 0 beginnt. Es gibt auch den Begriff der bilateralen Z-Transformation, die für Folgen $(a_k)_{k=-\infty}^\infty$ über $\sum_{k=-\infty}^\infty a_k z^{-k}$ berechnet wird. Damit entspricht sie einer diskreten Variante der Fourier-Transformation.

Im Gegensatz zur diskreten Fourier-Transformation, die Vektoren mit endlich vielen Komponenten auf Vektoren mit endlich vielen Komponenten abbildet und z. B. mit dem FFT-Algorithmus zur schnellen Fourier-Transformation berechnet werden kann, überführt die Z-Transformation Folgen (also abzählbar unendlich viele Komponenten) in eine Funktion mit einer komplexen Variable, also nicht in endlich oder abzählbar viele Werte.

Wichtig für das weitere Vorgehen ist, dass $A(1/z)$ eine Potenzreihe mit Entwicklungsmittelpunkt 0 ist:

$$A\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^\infty a_k z^k.$$

Ihr Konvergenzradius kann mit der Wachstumsbedingung abgeschätzt werden:

Lemma 2.1 (Definitionsbereich Z-Transformierte)

- a) *Unter den Voraussetzungen der Definition 2.1 umfasst der Definitionsbereich der Z-Transformierten $A(z)$ mindestens die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \alpha\}$. Hier ist A beliebig oft komplex*

differenzierbar, d. h. holomorph (vgl. z. B. [7, S. 393]).

b) Hat man umgekehrt eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k}$, die auf einer Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \alpha\}$ konvergiert, dann genügt die Folge $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ der Wachstumsbedingung $|a_k| \leq M(2\alpha)^k$.

Vor dem Beweis erinnern wir an die geometrische Summe und die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q},$$

wobei Konvergenz für komplexe Zahlen q mit $|q| < 1$ vorliegt.

Beweis:

a) Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ist wegen $|a_k z^k| \leq M[\alpha|z|]^k$ für alle z mit $|z| < 1/\alpha$ konvergent, da für diese Werte eine konvergente geometrische Reihe als Majorante gegeben ist. Der Konvergenzradius der Reihe ist also $\rho \geq 1/\alpha$, und für $|z| < \rho$ ist die Grenzfunktion beliebig oft (komplex) differenzierbar. Setzen wir nun die Funktion $1/z$ in die Reihe ein, dann erhalten wir die Aussage für $|z| > \alpha$.

b) Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergiert für $|z| < 1/\alpha$. Insbesondere muss daher $a_k z^k$ für $z = 1/(2\alpha)$ eine Nullfolge und damit beschränkt sein: $|a_k|/(2\alpha)^k \leq M$ bzw. $|a_k| \leq M(2\alpha)^k$. ■

Genau dann, wenn eine Folge der Wachstumsbedingung genügt, ist die Z-Transformierte für alle z , deren Betrag groß genug ist, erklärt. Ebenso ist dazu äquivalent, dass die entsprechende Potenzreihe einen Konvergenzradius größer null hat.

Beispiel 2.1 (Beispiele für Z-Transformierte)

- $Z((1,0,0,\dots)) = 1z^0 = 1$. Die Impulsfolge $(1,0,0,\dots)$ entspricht der δ -Distribution bei der Laplace-Transformation. Die Laplace-Transformierte der δ -Distribution ist ebenfalls die Einsfunktion. Während die δ -Distribution als verallgemeinerte Funktion häufig zu Verständnisproblemen führt, gibt es diese Schwierigkeiten bei der Impulsfolge nicht. Das erste Folgenglied hat den wohldefinierten Wert 1, während man bei der δ -Distribution anschaulich vom Funktionswert „ $\delta(0) = \infty$ “ spricht.

- Zu $a_k = a^k$, $a \in \mathbb{R}$, erhalten wir die Darstellung der Z-Transformierten über den Grenzwert der geometrischen Reihe für $|z| > |a|$:

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a}.$$

- Als Spezialfall für $a = 1$ ist die Transformierte der Folge $(1)_{k=1}^{\infty}$ die Funktion $z/(z - 1)$. Man beachte, dass die Laplace-Transformierte der Einsfunktion $1/z$ lautet. Z- und Laplace-Transformation führen also durchaus zu unterschiedlichen Ergebnissen.

- Für $a_0 = 0$ und $a_k = a^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$, ist

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^{k-1} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k \\ &= \frac{1}{z} \frac{z}{z - a} = \frac{1}{z - a}, \end{aligned} \tag{2}$$

wie zuvor für $|z| > |a|$. Dies ist zugleich die Laplace-Transformierte der Funktion $\exp(at)$.

- Für $a_k = k$ ergibt sich die Transformierte

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} k z^{-k} = -z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dz} z^{-k} \\ &= -z \frac{d}{dz} \sum_{k=1}^{\infty} z^{-k} = -z \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} - 1 \right] \\ &= \frac{z}{(1 - z^{-1})^2 z^2} = \frac{z}{(z - 1)^2}, \end{aligned}$$

da man bei Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius (der hier eins ist) Summation und Ableitung vertauschen darf.

Zum Vergleich liefert die Laplace-Transformation der Funktion $f(t) = t$ die Transformierte $1/z^2$.

- Für $a_k = \cos(\omega k) = \frac{1}{2}[\exp(j\omega k) + \exp(-j\omega k)]$ erhalten wir die Z-Transformierte für $|z| > 1$ als Grenzwert zweier geometrischer Reihen:

$$\begin{aligned} A(z) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\exp(j\omega)}{z} \right]^k + \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\exp(-j\omega)}{z} \right]^k \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - \frac{\exp(j\omega)}{z}} + \frac{1}{1 - \frac{\exp(-j\omega)}{z}} \right] \\ &= \frac{1 - \frac{1}{z} \cos(\omega)}{1 - \frac{2}{z} \cos(\omega) + \frac{1}{z^2}} = \frac{z^2 - z \cos(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}. \end{aligned}$$

- Analog erhält man die Transformierte für Abtastwerte der Sinus-Funktion. Sei dazu jetzt $a_k = \sin(\omega k) = \frac{j}{2}[\exp(-j\omega k) - \exp(j\omega k)]:$

$$\begin{aligned}
 A(z) &= \frac{j}{2} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\exp(-j\omega)}{z} \right]^k - \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\exp(j\omega)}{z} \right]^k \right] \\
 &= \frac{j}{2} \left[\frac{1}{1 - \frac{\exp(-j\omega)}{z}} - \frac{1}{1 - \frac{\exp(j\omega)}{z}} \right] \\
 &= \frac{\frac{j}{2} \sin(\omega)}{1 - \frac{2}{z} \cos(\omega) + \frac{1}{z^2}} = \frac{z \sin(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}.
 \end{aligned}$$

- Wählt man $\omega = \pi$, so ergibt sich aus der Transformierten für $a_k = \cos(\omega k):$

$$Z((1, -1, 1, -1, 1, \dots)) = \frac{z^2 + z}{z^2 + 2z + 1} = \frac{z}{z + 1}.$$

- Für $\omega = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich analog:

$$Z((1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots)) = \frac{z^2}{z^2 + 1}.$$

Die Ergebnisse dieses Beispiels sind in Tabelle 1 zusammengefasst.

Aus der Z-Transformierten kann man die Folge rekonstruieren, indem man für jedes Folgenglied ein komplexes Kurvenintegral ausrechnet. Da dieser Zusammenhang in vielen Elektrotechnik-Büchern angegeben wird, möchten wir ihn auch hier nicht unerwähnt lassen und sogar beweisen. Allerdings führt man die Umkehrtransformation in der Praxis ähnlich wie bei der Laplace-Transformation mittels Tabellen unter Ausnutzung von Rechenregeln durch. Diese behandeln wir im Anschluss.

Die Idee ist, die Eigenschaften der Potenzreihe $f(z) := A(1/z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ auszunutzen. Diese Reihe hat einen Konvergenzradius, der mindestens $1/\alpha$ beträgt. Da man innerhalb des Konvergenzradius gliedweise differenzieren darf, ist $f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$. Das ergibt sich auch aus dem Zusammenhang zwischen Potenz- und Taylor-Reihen. Damit können wir bereits die Folgenglieder auch ohne komplexe Integralrechnung über die Ableitungen von $A(1/z)$ an der Stelle 0 rekonstruieren.

Beispiel 2.2 (Fortlaufendes Differenzieren)

Zu $A(z) = 1/(z - a)$ (siehe Beispiel 2.1) berechnen wir

die Folgenglieder über die Ableitungen der Funktion

$$f(z) = \frac{1}{\frac{1}{z} - a} = \frac{z}{1 - az}$$

an der Stelle 0:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{0!} f(0) = 0, \\
 a_1 &= \frac{1}{1!} \frac{1 - az + az}{(1 - az)^2} \Big|_{z=0} = 1 = a^0, \\
 a_2 &= \frac{1}{2!} \frac{2a(1 - az)}{(1 - az)^4} \Big|_{z=0} = a = a^1, \\
 a_3 &= \frac{-2a^2(1 - az)^4 - 2a(1 - az)4(1 - az)^3(-a)}{3!(1 - az)^8} \Big|_{z=0} \\
 &= a^2, \dots
 \end{aligned}$$

Jetzt kommt der Cauchy-Integralsatz aus der Funktionentheorie zum Einsatz (siehe [7, S. 596]). Danach erhält man die n -te Ableitung von f an der Stelle 0 auch, wenn man das folgende Kurvenintegral berechnet, bei dem K eine geschlossene Jordan-Kurve um 0 ist, die vollständig innerhalb des Konvergenzradius liegt (innerhalb dessen f holomorph ist) und genau einmal im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird:

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2\pi j} \int_K \frac{f(z)}{(z - 0)^{n+1}} dz.$$

Das gilt beispielsweise für die konkrete Kurve K_1 mit der komplexen Parameterdarstellung $(\exp(jt)/(2\alpha), [0, 2\pi])$. Die komplexen Zahlen $\exp(jt)/(2\alpha)$ liegen auf einem Kreis mit Radius $1/(2\alpha)$ um den Nullpunkt. Wenn der Parameter t das Intervall $[0, 2\pi]$ durchläuft, dann wird dieser Kreis im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn) durchlaufen. In der folgenden Rechnung benötigen wir außerdem die Kurve K_2 , die einen Kreis mit Radius 2α um den Nullpunkt beschreibt und im mathematisch negativen Sinn durchlaufen wird. Ihre Parameterdarstellung lautet $(\exp(-jt)2\alpha, [0, 2\pi])$.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi j} \int_{K_1} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(\frac{\exp(jt)}{2\alpha}\right)}{\left(\frac{\exp(jt)}{2\alpha}\right)^{n+1}} \cdot j \frac{\exp(jt)}{2\alpha} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} \frac{f\left(\frac{1}{\exp(-jt)2\alpha}\right)}{\left(\frac{1}{\exp(-jt)2\alpha}\right)^{n+1}} \cdot j \frac{\exp(-jt)2\alpha}{(\exp(-jt)2\alpha)^2} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_{K_2} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\left(\frac{1}{z}\right)^{n+1}} \cdot \frac{-1}{z^2} dz \\
 &= -\frac{1}{2\pi j} \int_{K_2} A(z)z^{n-1} dz.
 \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile der Rechnung haben wir das Kurvenintegral über die Parametrisierung der Kurve angegeben. Diese wird für die Variable z eingesetzt, und der Term wird mit der Ableitung der Parametrisierung multipliziert.

Die Rechnung ist unabhängig von der Wahl der Kurven K_1 und K_2 , solange sie jeweils in den Gebieten liegen, in denen f bzw. A holomorph ist. Ersetzt man in diesem Sinne K_2 durch eine Jordan-Kurve, die im mathematisch positiven Sinn durchlaufen wird, erhält man die Umkehrformel der Z-Transformation:

Lemma 2.2 (Z-Umkehrtransformation)

Die Folge $(a_k)_{k=0}^\infty$ möge der Wachstumsbedingung $|a_k| \leq M\alpha^k$ genügen, und $A(z)$ sei die zugehörige Z-Transformierte. Weiter sei K eine positiv durchlaufene Jordan Kurve um den Nullpunkt, die vollständig im Gebiet $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \alpha\}$ liegt. Dann lassen sich die Folgenglieder so aus $A(z)$ berechnen:

$$a_n = \frac{1}{2\pi j} \int_K A(z)z^{n-1} dz.$$

Die Z-Transformation für Folgen, die der Wachstumsbedingung genügen, ist damit eine injektive Abbildung, verschiedene Folgen haben auch verschiedene Z-Transformierte.

Beispiel 2.3 (Umkehrtransformation) Wir transformieren $A(z) = 1/z$ zurück ($z \neq 0$). Dazu verwenden wir die Kurve $\exp(jt)$, $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{1}{z} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} \frac{j \exp(jt)}{\exp(jt)^2} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-jt) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t) - j \sin(t) dt = 0, \\
 a_1 &= \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} \frac{j \exp(jt)}{\exp(jt)} dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = 1.
 \end{aligned}$$

Für $k \geq 2$ ergibt sich entsprechend

$$a_k = \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{1}{z} z^{k-1} dz$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} j \exp(jt) \exp(j(k-2)t) dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((k-1)t) + j \sin((k-1)t) dt = 0.
 \end{aligned}$$

Tatsächlich ist $1/z$ die Transformierte der Folge $(0, 1, 0, 0, \dots)$. Das ergibt sich auch aus der Transformierten zu $(1, 0, 0, \dots)$ und der Regel (3) zur Verschiebung, die wir im nächsten Abschnitt behandeln.

3 Rechenregeln

Wir sehen uns nun die Eigenschaften der Z-Transformation an: Seien dazu $(a_k)_{k=0}^\infty$ und $(b_k)_{k=0}^\infty$ Folgen, die jeweils der Wachstumsbedingung genügen und die die Z-Transformierten $A(z)$ und $B(z)$ besitzen.

- **Linearität:** Für $c, d \in \mathbb{R}$ gilt auf dem gemeinsamen Definitionsbereich der Transformierten:

$$Z((ca_k + db_k)_{k=0}^\infty)(z) = cA(z) + dB(z).$$

Die Linearität folgt sofort aus den Rechenregeln für konvergente Reihen.

- **Verschiebung:** Sei $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
 Z((a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots))(z) &= Z((a_k)_{k=n}^\infty)(z) \\
 &= z^n \left[A(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{1}{z^k} \right],
 \end{aligned}$$

$$Z(\underbrace{(0, \dots, 0)}_n, a_0, a_1, \dots) = \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{1}{z^{k+n}} = z^{-n} A(z). \tag{3}$$

Wie bereits eingangs erwähnt, hat diese Gleichung für die Z-Transformation die gleiche Bedeutung wie die Ableitungsregel für die Laplace-Transformation. Mit ihrer Hilfe werden durch die Z-Transformation Differenzgleichungen so vereinfacht, dass man im transformierten Zustand ihr Ergebnis durch Multiplikation mit einer Übertragungsfunktion erhält. Das sehen wir uns weiter unten an.

- **Differenzensatz:** Für Differenzen $\Delta_1 a_k := a_{k+1} - a_k$ gilt:

$$\begin{aligned}
 &Z((a_{k+1} - a_k)_{k=0}^\infty) \\
 &= z^1 \left[A(z) - \sum_{k=0}^0 a_k \frac{1}{z^k} \right] - A(z)
 \end{aligned}$$

Tabelle 1: Einige Z-Transformierte (siehe Beispiele 2.1, 2.3, 3.1, 3.2, 3.3; $a, \omega \in \mathbb{R}$)

Folge	$\circ \text{---} \bullet$	Z-Transformierte	Konvergenzbereich
$(a_k)_{k=0}^\infty$		$A(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{1}{z^k}$	$ z > \alpha$
$(1, 0, 0, \dots)$		1	$z \in \mathbb{C}$
$(0, 1, 0, 0, \dots)$		$\frac{1}{z}$	$z \neq 0$
$(0, 0, 1, 0, \dots)$		$\frac{1}{z^2}$	$z \neq 0$
$(1, 1, 1, \dots)$		$\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n+1}, 0, 0, \dots)$		$\frac{z^{n+1} - 1}{z^{n+1} - z^n}$	$z \neq 0$
$a_k = a^k$		$\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
$a_0 = 0, a_k = a^{k-1}$ für $k \geq 1$		$\frac{1}{z-a}$	$ z > a $
$a_k = k$		$\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
$a_k = k^2$		$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$ z > 1$
$a_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k < m \\ a^{k-m} \binom{k}{m} & \text{für } k \geq m \end{cases}$		$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$	$ z > a $
$a_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k < m+1 \\ a^{k-1-m} \binom{k-1}{m} & \text{für } k \geq m+1 \end{cases}$		$\frac{1}{(z-a)^{m+1}}$	$ z > a $
$\sin(\omega k)$		$\frac{z \sin(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$	$ z > 1$
$\cos(\omega k)$		$\frac{z^2 - z \cos(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$	$ z > 1$
$(1, -1, 1, -1, 1, \dots)$		$\frac{z}{z+1}$	$ z > 1$
$(1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots)$		$\frac{z^2}{z^2 + 1}$	$ z > 1$

$$= (z-1)A(z) - za_0. \tag{4}$$

Entsprechend gilt für zweite Differenzen $\Delta_2 a_k := \Delta_1 \Delta_1 a_k = (a_{k+2} - a_{k+1}) - (a_{k+1} - a_k) = a_{k+2} - 2a_{k+1} + a_k$:

$$\begin{aligned} Z((\Delta_2 a_k)_{k=0}^\infty) &= (z-1)[(z-1)A(z) - za_0] - z[a_1 - a_0] \\ &= (z-1)^2 A(z) - z^2 a_0 + 2za_0 - za_1. \end{aligned}$$

• **Dämpfung:** Sei $c > 0$, dann gilt für cz im Definitionsbereich von A :

$$Z((c^{-k} a_k)_{k=n}^\infty)(z) = \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{1}{(cz)^k} = A(cz).$$

• **Ableitung der Transformierten:** Die Transformierte ist eine Verkettung einer Potenzreihe mit $1/z$. Anwendung der Kettenregel zusammen mit

der erlaubten gliedweisen Differenziation der Potenzreihe ergibt:

$$\begin{aligned} A'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \left(\frac{1}{z}\right)^{k-1} \frac{-1}{z^2} = -\frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} a_k k \frac{1}{z^k} \\ &= -\frac{1}{z} Z((ka_k)_{k=0}^{\infty}), \end{aligned}$$

also

$$Z((ka_k)_{k=0}^{\infty}) = -zA'(z).$$

• **Summensatz:**

$$\begin{aligned} Z\left(\left(\sum_{n=0}^k a_k\right)_{k=0}^{\infty}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_n z^{-k} \\ &= A(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{k-1} a_n z^{-k} \\ &= A(z) + z^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_n z^{-k}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir durch Subtraktion des rechten Terms von beiden Seiten:

$$(1 - z^{-1}) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^k a_n z^{-k} = A(z),$$

so dass

$$Z\left(\left(\sum_{n=0}^k a_k\right)_{k=0}^{\infty}\right) = \frac{A(z)}{1 - z^{-1}} = \frac{zA(z)}{z - 1}.$$

• **Anfangswertsatz:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} A(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0,$$

da die Potenzreihe insbesondere stetig in $x = 0$ ist und hier den Wert a_0 annimmt.

Mit der Formel über die Verschiebung lassen sich so auch beliebige andere Folgenglieder berechnen:

$$a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \left[A(x) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{1}{x^k} \right].$$

• **Endwertsatz:** Hier müssen wir voraussetzen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ als reelle Zahl existiert. Da die

Folge konvergent ist, ist sie insbesondere beschränkt: $|a_n| \leq M = M\alpha^k$ für $\alpha = 1$. Damit existiert $A(z)$ für $|z| > 1$. Die Aussage des Endwertsatzes ist nun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1)A(x).$$

Den Endwertsatz der Laplace-Transformation kann man über die Transformationsregel für Ableitungen motivieren. Daher ist es nun naheliegend, den Endwertsatz für die Z-Transformation mit dem Differenzensatz zu beweisen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} Z((a_{k+1} - a_k)_{k=0}^{\infty})(x) & \\ \stackrel{(4)}{=} \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1)A(x) - xa_0 & \\ = -a_0 + \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1)A(x). & \quad (5) \end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} Z((a_{k+1} - a_k)_{k=0}^{\infty})(x) & \\ = \lim_{x \rightarrow 1+} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n [a_{k+1} - a_k] x^{-k} & \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \lim_{x \rightarrow 1+} [a_{k+1} - a_k] x^{-k} & \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n [a_{k+1} - a_k] = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \right] - a_0 & \\ = -a_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n. & \quad (6) \end{aligned}$$

Dabei haben wir im vorletzten Schritt die Teleskopsumme ausgerechnet. Der eigentliche Trick besteht aber im Vertauschen der Grenzwerte. Dies ist erlaubt, wenn die Grenzfunktion der Reihe einseitig stetig an der Stelle 1 ist. Der Abel'sche Grenzwertsatz stellt genau das unter der erfüllten Voraussetzung sicher, dass die Zahlenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} [a_{k+1} - a_k] = -a_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ konvergiert. Die Vertauschung der Grenzwerte ist also erlaubt.

Setzen wir (5) und (6) zusammen, so erhalten wir

$$-a_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -a_0 + \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1)A(x)$$

und durch Addition von a_0 auf beide Seiten die Aussage des Endwertsatzes.

Beispiel 3.1 (Transformation durch Verschiebung)
Wir transformieren ein diskretes Rechtecksignal $(a_k)_{k=1}^\infty$ mit

$$a_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, \dots, n \\ 0 & \text{für } k > n. \end{cases}$$

Mit $Z((1, 0, 0, \dots)) = 1$ und (3) erhalten wir für $z \neq 0$: $Z((0, 1, 0, \dots)) = z^{-1} \cdot 1$, $Z((0, 0, 1, 0, \dots)) = z^{-2}$, usw.:

$$\begin{aligned} A(z) &= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots + \frac{1}{z^n} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{z^{n+1}}}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z^{n+1} - 1}{z^{n+1} - z^n}. \end{aligned}$$

Wie bei der Laplace-Transformation gilt ein Faltungssatz. Die **Faltung** „*“ zweier Folgen ist, wie in der Einleitung angegeben, passend zum Cauchy-Produkt von Reihen definiert über

$$(a_k)_{k=0}^\infty * (b_k)_{k=0}^\infty := \left(\sum_{n=0}^k a_{k-n} b_n \right)_{k=0}^\infty.$$

Die Faltung ist kommutativ, und erfüllen die zu falten den Folgen die Wachstumsbedingungen $|a_k| \leq M_1 \alpha_1^k$ und $|b_k| \leq M_2 \alpha_2^k$, dann genügt auch die resultierende Folge einer Wachstumsbedingung (für $\alpha := \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$):

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^k a_{k-n} b_n \right| &\leq \sum_{n=0}^k M_1 \alpha_1^{k-n} M_2 \alpha_2^n \\ &\leq (k+1) M_1 M_2 \alpha^k \leq 2^k M_1 M_2 \alpha^k \\ &= M_1 M_2 (2\alpha)^k. \end{aligned}$$

Als direkte Konsequenz des Cauchy-Produkts von Potenzreihen gilt der **Faltungssatz**:

$$Z((a_k)_{k=0}^\infty * (b_k)_{k=0}^\infty)(z) = A(z) \cdot B(z).$$

Multiplizieren wir also zwei Z-Transformierte, so erhalten wir ebenfalls wieder eine Z-Transformierte. Das neutrale Element der Faltung ist die Impulsfolge $(1, 0, 0, \dots)$ mit der Transformierten 1. Über den Faltungssatz sieht man das sofort.

Mit den Rechenregeln und einigen bekannten Z-Transformierten lässt sich die Umkehrfunktion leichter als mit einem komplexen Kurvenintegral oder durch fortgesetztes Ableiten berechnen.

Beispiel 3.2 (Transformation mittels Faltung) Wir zeigen in diesem Beispiel, dass für $m \in \mathbb{N}_0$ die Folge

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k < m \\ a^{k-m} \binom{k}{m} & \text{für } k \geq m \end{cases}$$

die Transformierte $z/(z-a)^{m+1}$ besitzt ($|z| > |a|$). Dazu führen wir eine vollständige Induktion nach m durch. Für $m = 0$ (Induktionsanfang) haben wir die Transformierte bereits in Beispiel 2.1 berechnet. Wir nehmen also an, dass die Aussage für ein (beliebiges, festes) $m \in \mathbb{N}_0$ gilt und müssen sie jetzt nur noch für $m+1$ zeigen: Da

$$\frac{z}{(z-a)^{m+2}} = \frac{z}{(z-a)^{m+1}} \cdot \frac{1}{(z-a)},$$

ist, ergibt sich die zugehörige Folge als Faltung der über die Induktionsannahme gegebenen Folge und, siehe (2), der Folge $(0, a^0, a^1, a^2, \dots)$ zu $a_k = 0$ für $k < m+1$ und für $k \geq m+1$ zu

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{n=m}^{k-1} a^{n-m} \binom{n}{m} a^{k-n-1} \\ &= a^{k-(m+1)} \sum_{n=m}^{k-1} \binom{n}{m} = a^{k-(m+1)} \binom{k}{m+1}. \end{aligned}$$

Wir müssen noch für die letzte Gleichung nachrechnen, dass für $k \geq m+1$ gilt:

$$\sum_{n=m}^{k-1} \binom{n}{m} = \binom{k}{m+1}.$$

Induktionsanfang: Für $k = m+1$ ist $\binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1}$.
Induktionsannahme: Die Aussage gelte für ein (beliebiges, festes) $k \geq m+1$.

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^k \binom{n}{m} &= \binom{k}{m} + \sum_{n=m}^{k-1} \binom{n}{m} \\ &= \binom{k}{m} + \binom{k}{m+1} = \binom{k+1}{m+1}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Induktionsannahme und das Bildungsgesetz des Pascal'schen Dreiecks ausgenutzt.

Die gängigste Methode zur Berechnung der Z-Umkehrtransformation besteht darin, die Tabelle 1 von rechts nach links zu lesen und kompliziertere Transformierte mit den Rechenregeln in Transformierte zu

zerlegen, die sich in der Tabelle finden. Das folgende Beispiel beschäftigt sich mit dem Fall der Rücktransformation einer gebrochen-rationalen Funktion.

Beispiel 3.3 (Gebrochen-rationale Funktion)

Eine gebrochen-rationale Funktion, deren Zähler einen kleineren Grad als der Nenner hat, lässt sich über eine Partialbruchzerlegung darstellen. Die Summanden der Partialbruchzerlegung lassen sich leicht zurücktransformieren, beispielsweise gilt:

$$Z^{-1} \left(\frac{1}{z-a} \right) \stackrel{(2)}{=} (0, 1, a, a^2, a^3, \dots),$$

und für $m \geq 1$ ist

$$\begin{aligned} Z^{-1} \left(\frac{1}{(z-a)^{m+1}} \right) &= Z^{-1} \left(\frac{1}{z} \cdot \frac{z}{(z-a)^{m+1}} \right) \\ &= Z^{-1} \left(\frac{1}{z} \right) * Z^{-1} \left(\frac{z}{(z-a)^{m+1}} \right) \\ &= (0, 1, 0, 0, \dots) * (a_k)_{k=0}^\infty \end{aligned}$$

mit der Folge $(a_k)_{k=0}^\infty$ aus Beispiel 3.2. Daraus ergibt sich

$$Z^{-1} \left(\frac{1}{(z-a)^{m+1}} \right) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < m+1 \\ a^{k-1-m} \binom{k-1}{m} & \text{für } k \geq m+1. \end{cases}$$

Damit erhalten wir beispielsweise

$$\begin{aligned} Z^{-1} \left(\frac{2}{z-1} + \frac{3}{(z-1)^2} \right) &= 2 \cdot (0, 1, 1, 1, \dots) + 3 \cdot (0, 0, 1, 2, 3, \dots) \\ &= (0, 2, 5, 8, 11, \dots). \end{aligned}$$

Ist a eine komplexe Nullstelle des Nenners, so kann man ebenfalls mit den zuvor angegebenen Formeln die Rücktransformation durchführen und dann gegebenenfalls die komplexen Folgen zu einer reellen zusammenfassen.

4 Lineare zeitinvariante Abtastsysteme

Ein **lineares zeitinvariante Abtastsystem** überführt eine Eingangsfolge $(x_k)_{k=0}^\infty$ in eine Ausgangsfolge $(y_k)_{k=0}^\infty$ als Lösung einer Differenzgleichung

$$y_k + a_{n-1}y_{k-1} + \dots + a_0y_{k-n}$$

$$= b_nx_k + b_{n-1}x_{k-1} + \dots + b_0x_{k-n}, \quad (7)$$

wobei $x_k = y_k := 0$ für $k < 0$ ist.

Die Bezeichnung Abtastsystem rührt daher, dass lineare zeitinvariante Systeme für kontinuierliche Signale über lineare Differenzialgleichungen beschrieben werden. Ersetzt man die Ableitungen durch Differenzenquotienten, so erhält man eine Differenzgleichung für diskrete, abgetastete Werte der Signale. Tatsächlich sieht man in (7) keine Differenzen. Wenn man aber Ableitungen durch Differenzen annähert, dann bekommt man Linearkombinationen von Abtastwerten, wie sie auf beiden Seiten der Gleichung mit den allgemeinen Koeffizienten angegeben sind.

Man beachte, dass die Differenzgleichung (7) für jede Ausgangsfolge $(x_k)_{k=0}^\infty$ eine eindeutige Lösung hat, die sukzessive beginnend mit y_0 berechnet werden kann ($n \geq 2$):

$$\begin{aligned} y_0 &= b_nx_0, \\ y_1 &= -a_{n-1}y_0 + b_nx_1 + b_{n-1}x_0, \\ y_2 &= -a_{n-1}y_1 - a_{n-2}y_0 + b_nx_2 + b_{n-1}x_1 + b_{n-2}x_0, \dots \end{aligned}$$

Über die eindeutige Lösung der Differenzgleichung wird eine lineare Abbildung L definiert, die einer Eingangsfolge die Ausgangsfolge zuordnet: $L((x_k)_{k=0}^\infty) = (y_k)_{k=0}^\infty$. Die Abbildung ist auf dem Vektorraum der (reellen) Folgen definiert, und sie bildet in den gleichen Vektorraum ab. Tatsächlich ist L eine **lineare** Abbildung, da jede Linearkombination von Folgen auf die Linearkombination ihrer Bilder abgebildet wird. Das passt zur Bezeichnung **lineare** zeitinvariante Abtastsysteme. Das Attribut **zeitinvariant** rührt daher, dass eine („zeitlich“ nach rechts) verschobene Eingangsfolge zu einer entsprechend verschobenen Ausgangsfolge führt.

Im Folgenden werden wir die Z-Transformation im Umgang mit linearen zeitinvarianten Abtastsystemen genau so einsetzen, wie die Laplace-Transformation für lineare zeitinvariante Systeme verwendet wird. Dazu bezeichnen wir mit $X(z)$ die Transformierte der Eingangsfolge $(x_k)_{k=0}^\infty$ und mit $Y(z)$ die Transformierte der zugehörigen Ausgangsfolge $(y_k)_{k=0}^\infty$.

Die zugehörige **Z-Übertragungsfunktion** $G(z)$ ist für ein beliebiges Paar von Ein- und Ausgangsfolgen $(x_k)_{k=0}^\infty$ und $(y_k)_{k=0}^\infty$, die der Wachstumsbedingung genügen und damit Z-Transformierte haben, definiert

als Quotient

$$G(z) := \frac{Y(z)}{X(z)}. \tag{8}$$

Zunächst ist nicht klar, dass die Definition unabhängig von der Wahl der Folgen ist. Aber mittels Linearität und der Verschiebe-Regel (3), die die Funktion der Ableitungsregel der Laplace-Transformation widerspiegelt, liefert die Transformation der linken Seite der Gleichung (7):

$$\begin{aligned} Z((y_k + a_{n-1}y_{k-1} + \dots + a_0y_{k-n})_{k=0}^\infty) \\ = Y(z) + a_{n-1}z^{-1}Y(z) + \dots + a_0y_{k-n}z^{-n}Y(z) \\ = Y(z) \frac{1}{z^n} [z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0]. \end{aligned}$$

Entsprechend wird die rechte Seite zu $X(z) \frac{1}{z^n} [b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0]$. Damit ist

$$\begin{aligned} Y(z) \frac{1}{z^n} [z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0] \\ = X(z) \frac{1}{z^n} [b_n z^n + b_{n-1}z^{n-1} + \dots + b_0], \end{aligned}$$

und wir erhalten für die Z-Übertragungsfunktion die Darstellung

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= \frac{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0} \tag{9} \\ &= \frac{b_n + b_{n-1} z^{-1} + \dots + b_0 z^{-n}}{1 + a_{n-1} z^{-1} + a_{n-2} z^{-2} + \dots + a_0 z^{-n}}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $G(z)$ also tatsächlich unabhängig von der konkreten Wahl der Eingangs- und zugehörigen Ausgangsfolge. Damit ist (8) wohldefiniert.

Damit wir im Zähler und Nenner den gleichen Vorfaktor $1/z^n$ sehen, haben wir auf beiden Seiten der Differenzgleichung formal die gleiche Anzahl n von Summanden hingeschrieben. Tatsächlich dürfen aber Koeffizienten b_k zu null gewählt werden, der Grad des Nennerpolynoms kann also größer als der Grad des Zählerpolynoms sein.

Die Übertragungsfunktion des ersten Beispiels der Einleitung, bei dem eine Eingangsfolge um eine Stelle verschoben wird, um die Ausgangsfolge zu erhalten, ist (siehe Tabelle 1)

$$\frac{Z((0, 1, 0, 0, \dots))}{Z(1, 0, 0, \dots)} = \frac{\frac{1}{z}}{1} = \frac{1}{z} \tag{10}$$

Diese Übertragungsfunktion lässt sich auch direkt an der Differenzgleichung

$$y_k + \underbrace{a_{1-1}}_{=0} = \underbrace{b_1}_{=0} x_k + \underbrace{b_{1-1}}_{=1} x_{k-1}$$

ablesen: $G(z) = \frac{0z^1 + 1z^0}{z^1 + 0z^0} = \frac{1}{z}$. Das gilt auch für das zweite Beispiel (1), bei dem die Differenzgleichung

$$y_k + \underbrace{a_{1-1}}_{=-0,999} y_{k-1} = \underbrace{b_1}_{=1} x_k + \underbrace{b_{1-1}}_{=-1} x_{k-1}$$

gegeben ist, so dass

$$G(z) = \frac{1 \cdot z^1 - 1}{1 \cdot z^1 - 0,999} = \frac{z - 1}{z - 0,999}. \tag{11}$$

Mit der Übertragungsfunktion können wir nun zu einer Eingangsfolge $(x_k)_{k=0}^\infty$ sofort die Ausgangsfolge $(y_k)_{k=0}^\infty$ berechnen: Wir transformieren die Eingangsfolge zu $X(z)$, multiplizieren die Transformierte mit $G(z)$ und erhalten die Transformierte $Y(z)$ der Ausgangsfolge:

$$Y(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \cdot X(z) = G(z) \cdot X(z).$$

Die Ausgangsfolge ergibt sich nun durch Rücktransformation von $Y(z)$. Unter der Z-Transformation wird das Lösen einer Differenzgleichung zur Multiplikation mit einer Übertragungsfunktion – und das ist einfacher, als die Gleichung iterativ zu lösen. Entsprechend wird unter der Laplace-Transformation das Lösen einer linearen Differenzialgleichung zum Lösen einer algebraischen Gleichung.

Eine kleine Lücke müssen wir aber noch schließen: Das Vorgehen gelingt nur, wenn zu einer Eingangsfolge, die der Wachstumsbedingung genügt und damit Z-transformierbar ist, auch die Ausgangsfolge der Wachstumsbedingung genügt. Das sehen wir aber z. B. so:

$$G\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{b_n + b_{n-1}z + b_{n-2}z^2 + \dots + b_0z^n}{1 + a_{n-1}z + a_{n-2}z^2 + \dots + a_0z^n}$$

lässt sich als Potenzreihe um Null mit einem Konvergenzradius größer null entwickeln. Denn wegen der Normierung des ersten Nennerkoeffizienten zu eins ist null keine Nullstelle des Nenners und damit kein Pol. Nach Lemma 2.1 b) lässt sich $G(z)$ als Z-Transformierte einer Folge auffassen, die der

Wachstumsbedingung genügt. Ebenso ist das Produkt von $G(z)$ mit der Transformierten $X(z)$ einer Eingangsfolge $(x_k)_{k=0}^\infty$, die der Wachstumsbedingung genügt, nach dem Faltungssatz die Z-Transformierte einer Folge $(y_k)_{k=0}^\infty$, die auch der Wachstumsbedingung genügt. Diese Folge erfüllt die Z-transformierte Differenzgleichung und damit nach Anwendung der Z-Umkehrtransformation auch die eindeutig lösbare Differenzgleichung. Die Lücke ist damit geschlossen und wir haben bewiesen:

Lemma 4.1 (Lineare zeitinvariante Abtastsysteme)

Zu einer Eingangsfolge $(x_k)_{k=0}^\infty$, die der Wachstumsbedingung genügt, ist auch die über (7) eindeutig bestimmte Ausgangsfolge $(y_k)_{k=0}^\infty$ Z-transformierbar, d. h., auch sie genügt einer Wachstumsbedingung. Für die Z-Transformierten gilt (auf einem gemeinsamen Definitionsbereich) $Y(z) = G(z)X(z)$, wobei $G(z)$ die Übertragungsfunktion mit der Darstellung (10) ist.

Wie bei der Laplace-Transformation lässt sich die Übertragungsfunktion aus einer **Impulsantwort** gewinnen. Betrachten wir als Eingangsfolge den Impuls $(1, 0, 0, \dots)$ mit der Z-Transformierten $X(z) = 1$, siehe Beispiel 2.1. Ist $(g_k)_{k=0}^\infty$ die zugehörige Ausgangsfolge (Impulsantwort), dann gilt:

$$Z((g_k)_{k=0}^\infty) = G(z)X(z) = G(z). \tag{12}$$

Die Z-Übertragungsfunktion $G(z)$ ist also die Z-Transformierte der Impulsantwort. Mit dem Faltungssatz können wir das Verhalten des Abtastsystems als Faltung der Eingangsfolge mit der Impulsantwort beschreiben:

$$(x_k)_{k=0}^\infty * (g_k)_{k=0}^\infty = (y_k)_{k=0}^\infty,$$

da Z-Transformation beider Seiten $X(z) \cdot G(z) = Y(z)$ liefert.

Genau wie bei der Laplace-Transformation berechnet sich die Übertragungsfunktion leicht aus den einzelnen Übertragungsfunktionen, wenn lineare zeitinvariante Abtastsysteme miteinander kombiniert werden. Es gelten exakt die gleichen Regeln wie bei der Laplace-Transformation. Diese sind in Abbildung 2 dargestellt:

- Schaltet man mehrere Abtastsysteme hintereinander, indem die Ausgangsfolge des ersten zur Eingangsfolge des zweiten, die Ausgangsfolge des zweiten zur Eingangsfolge des dritten usw.

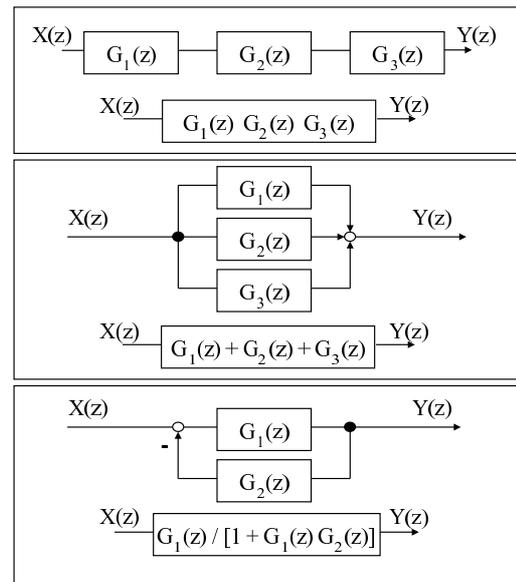


Abbildung 2: Blockschaltbilder: Reihenschaltung, Parallelschaltung und Rückkopplung jeweils mit Ersatzschaltbild

wird, dann entsteht insgesamt ein neues lineares zeitinvariantes Abtastsystem, dessen Übertragungsfunktion das Produkt der einzelnen Übertragungsfunktionen G_1, \dots, G_n ist:

$$\begin{aligned} Y_1(z) &= G_1(z)X(z), & Y_2(z) &= G_2(z)Y_1(z), \\ Y_3(z) &= G_3(z)Y_2(z), \dots & \implies \\ Y(z) &= G_n(z)Y_{n-1}(z) = G_n(z)G_{n-1}Y_{n-2}(z) \\ &= \dots = \left(\prod_{k=1}^n G_k(z) \right) X(z). \end{aligned}$$

- Schaltet man zwei Abtastsysteme mit Übertragungsfunktionen G_1 und G_2 parallel, so gilt für die Z-Transformierte $Y(z)$ der Ausgangsfolge $(y_k)_{k=0}^\infty$:

$$\begin{aligned} Y(z) &= G_1(z)X(z) + G_2(z)X(z) \\ &= [G_1(z) + G_2(z)]X(z). \end{aligned}$$

Entsprechend ergibt sich die neue Übertragungsfunktion bei einer Parallelschaltung von n Abtastsystemen als die Summe der einzelnen.

- Bei einer Rückkopplung (siehe drittes Blockschaltbild in Abbildung 2) ohne zeitlichen Verzögerung wird von der Eingangsfolge $(x_k)_{k=0}^\infty$ die aus

der Rückkopplung entstehende Folge $((y_R)_k)_{k=0}^\infty$ abgezogen. Z-transformiert wird daraus

$$\begin{aligned} Y(z) &= G_1(z)[X(z) - Y_R(z)] \\ &= G_1(z)[X(z) - G_2(z)Y(z)] \end{aligned}$$

$$\iff [1 + G_1(z)G_2(z)]Y(z) = G_1(z)X(z).$$

Damit lautet die gesamte Übertragungsfunktion

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{G_1(z)}{1 + G_1(z)G_2(z)}.$$

Ausgangssignale zu miteinander verknüpften linearen zeitinvarianten Abtastsystemen können somit berechnet werden, indem

- eine gemeinsame Übertragungsfunktion aus den einzelnen berechnet wird,
- das Eingangssignal Z-transformiert wird,
- das transformierte Eingangssignal mit der gemeinsamen Übertragungsfunktion multipliziert wird,
- das Ergebnis mit der Z-Umkehrtransformation zurück in eine Folge gewandelt wird.

5 Stabilität

In der Regelungstechnik sind lineare zeitinvariante Abtastsysteme von besonderer Bedeutung, die stabil sind (vgl. z. B. [6, Kap. 16] und die ausführliche Darstellung in [10]).

Definition 5.1 (Stabilität) Ein lineares zeitinvariantes Abtastsystem heißt **stabil** genau dann, wenn zu jeder beschränkten Eingangsfolge $(x_k)_{k=0}^\infty$ auch die zugehörige Ausgangsfolge $(y_k)_{k=0}^\infty$ als Lösung von (7) beschränkt ist.

Dieser Stabilitätsbegriff wird auch BIBO-Stabilität genannt („bounded input – bounded output“). Wir geben eine äquivalente Formulierung dieses Begriffs an:

Satz 5.1 (Stabilität und Stetigkeit) Ein lineares zeitinvariantes Abtastsystem ist genau dann stabil, wenn es eine von den Eingangsfolgen unabhängige Konstante C gibt, so dass für jedes Paar aus einer be-

schränkten Eingangsfolge $(x_k)_{k=0}^\infty$ und der zugehörigen Ausgangsfolge $(y_k)_{k=0}^\infty$ als Lösung von (7) gilt:

$$\|(y_k)_{k=0}^\infty\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}_0} |y_k| \leq C \|(x_k)_{k=0}^\infty\|_\infty := C \sup_{k \in \mathbb{N}_0} |x_k|. \quad (13)$$

Der Satz besagt, dass die lineare Abbildung L , die einer Eingangsfolge ihre Ausgangsfolge zuordnet, stetig im folgenden Sinn ist: Haben wir zwei Eingangsfolgen $(x_k)_{k=0}^\infty$ und $(w_k)_{k=0}^\infty$, dann gilt für die Ausgangsfolgen

$$\begin{aligned} \|L((x_k)_{k=0}^\infty) - L((w_k)_{k=0}^\infty)\|_\infty \\ = \|L((x_k - w_k)_{k=0}^\infty)\|_\infty \stackrel{(13)}{\leq} C \|(x_k - w_k)_{k=0}^\infty\|_\infty. \end{aligned}$$

Wenn sich also die Eingangsfolgen kaum unterscheiden, dann gilt das auch für die Ausgangsfolgen. Stabilität ist also nur ein anderes Wort für Stetigkeit. Ändert man eine Eingangsfolge nur wenig, so ändert sich auch die Ausgangsfolge nur wenig. Das ist in den Anwendungen wichtig, damit eine Regelung nicht außer Kontrolle gerät.

Falls eine Konstante C wie im Satz angegeben existiert, dann folgt sofort die Definition der Stabilität. Die umgekehrte Richtung ist wesentlich schwieriger. Ihr Beweis ist eine Konsequenz aus dem Prinzip gleichgradiger Beschränktheit (uniform boundedness principle). Das ist ein Hauptsatz der Funktionalanalysis über Abbildungen zwischen Banach-Räumen, d. h. vollständigen Vektorräumen mit einer Norm. Beispielsweise ist \mathbb{R} zusammen mit dem Betrag als Norm ein Banach-Raum. Aber auch der Vektorraum der beschränkten Folgen, den wir l_∞ nennen, wird unter der Norm $\|(x_k)_{k=0}^\infty\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}_0} |x_k|$ zu einem Banach-Raum. Für den Spezialfall linearer Abbildungen von l_∞ nach \mathbb{R} formulieren wir das Prinzip:

Satz 5.2 (Prinzip gleichgradiger Beschränktheit)

Sei \mathcal{F} eine Menge linearer Abbildungen (linearer Funktionale) von l_∞ nach \mathbb{R} , die die beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

- Für jede Abbildung $F \in \mathcal{F}$ existiert eine Konstante $C_F \in \mathbb{R}$, so dass für alle Folgen $(x_k)_{k=0}^\infty \in l_\infty$ gilt:

$$|F((x_k)_{k=0}^\infty)| \leq C_F \|(x_k)_{k=0}^\infty\|_\infty.$$

Diese Bedingung bedeutet, dass jede Abbildung $F \in \mathcal{F}$ beschränkt und somit, wie zuvor für L erläutert, stetig ist.

- Für jede einzelne Folge $(x_k)_{k=0}^\infty \in l_\infty$ ist die Menge $\{F((x_k)_{k=0}^\infty) : F \in \mathcal{F}\}$ beschränkt. Dies wird punktweise Beschränktheit genannt (wobei der „Punkt“ die Folge $(x_k)_{k=0}^\infty$ ist).

Dann gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass für alle Abbildungen $F \in \mathcal{F}$ und für alle Folgen $(x_k)_{k=0}^\infty \in l_\infty$ gilt:

$$|F((x_k)_{k=0}^\infty)| \leq C \|(x_k)_{k=0}^\infty\|_\infty.$$

Die Konstanten C_F können also durch eine gemeinsame Konstante C ersetzt werden. Man spricht von gleichgradiger Beschränktheit.

Ein konstruktiver Beweis, der ursprünglich in ähnlicher Form auch von Banach geführt wurde, wird z. B. in [14] präsentiert. Ein nicht-konstruktiver Beweis mit dem Baire'schen Kategoriensatz ist z. B. in [9, S. 246 f.] angegeben.

Wir benutzen nun das Prinzip gleichgradiger Beschränktheit, um den Beweis des Satzes 5.1 zu vervollständigen. Dazu betrachten wir die Menge linearer Abbildungen $\mathcal{F} := \{L_m : m \in \mathbb{N}\}$, die über $L_m((x_k)_{k=0}^\infty) := L((x_k)_{k=0}^\infty)_m = y_m$ definiert sind. $L_m : l_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ liefert also zu einer Eingangsfolge das m -te Folgenglied der Ausgangsfolge. Wir prüfen die beiden Voraussetzungen des Prinzips:

Aufgrund der Differenzgleichung ist

$$\begin{aligned} |L_m((x_k)_{k=0}^\infty)| &= |y_m| \\ &= |-a_{n-1}y_{m-1} - \dots - a_0y_{m-n} + b_nx_m \\ &\quad + b_{n-1}x_{m-1} + \dots + b_0x_{m-n}| \\ &\leq \max\{|a_0|, \dots, |a_{n-1}|\} \max\{|y_0|, \dots, |y_{m-1}|\} \\ &\quad + \max\{|b_0|, \dots, |b_n|\} \|(x_k)_{k=0}^\infty\|_\infty. \end{aligned}$$

Indem wir nun den größten Wert von $|y_0|, \dots, |y_{m-1}|$ entsprechend abschätzen und iterativ fortfahren, erhalten wir

$$\begin{aligned} |L_m((x_k)_{k=0}^\infty)| &\leq \left[\sum_{k=0}^m (\max\{|a_0|, \dots, |a_{n-1}|\})^k \right] \\ &\quad \cdot \max\{|b_0|, \dots, |b_n|\} \|(x_k)_{k=0}^\infty\|_\infty \\ &=: C_m \|(x_k)_{k=0}^\infty\|_\infty. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass jede einzelne Abbildung L_m beschränkt ist.

Stabilität im Sinne der Definition 5.1 bedeutet, dass für jede Eingangsfolge $(x_k)_{k=0}^\infty \in l_\infty$ die zugehörige Ausgangsfolge $(L_n((x_k)_{k=0}^\infty))_{n=0}^\infty$ beschränkt ist. Insbesondere ist also für jede Folge $(x_k)_{k=0}^\infty \in l_\infty$ die Menge

$\{L_m((x_k)_{k=0}^\infty) : m \in \mathbb{N}_0\}$ beschränkt, so dass punktweise Beschränktheit vorliegt.

Jetzt besagt das Prinzip der gleichgradigen Beschränktheit, dass es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$|y_m| = |L_m((x_k)_{k=0}^\infty)| \leq C \|(x_k)_{k=0}^\infty\|_\infty.$$

für alle $m \in \mathbb{N}_0$ und alle Folgen $(x_k)_{k=0}^\infty \in l_\infty$ gilt. Damit haben wir (13) bewiesen:

$$\|(y_n)_{n=0}^\infty\|_\infty \leq C \|(x_k)_{k=0}^\infty\|_\infty.$$

Lemma 5.1 (Absolute Summierbarkeit)

Ein lineares, zeitinvariantes Abtastsystem ist genau dann stabil, wenn die Impulsantwort $(g_k)_{k=0}^\infty$ absolut summierbar ist, d. h.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g_k| < \infty.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass aus der absoluten Summierbarkeit die Stabilität folgt und wählen die Konstante $C := \sum_{k=0}^{\infty} |g_k|$. Sei $(x_k)_{k=0}^\infty$ eine beschränkte Eingangsfolge mit $M := \sup_{k \in \mathbb{N}_0} |x_k|$. Dann gilt für die Ausgangsfolge:

$$|y_k| = |((x_n)_{n=0}^\infty * (g_n)_{n=0}^\infty)_k| = \left| \sum_{n=0}^k x_{k-n} g_n \right|.$$

Ist die Impulsantwort $(g_k)_{k=0}^\infty$ absolut summierbar, dann ist y_k beschränkt mit

$$\begin{aligned} |y_k| &\leq \sum_{n=0}^k |x_{k-n}| |g_n| \leq M \sum_{n=0}^k |g_n| \\ &\leq M \sum_{n=0}^{\infty} |g_n| = MC = C \sup_{k \in \mathbb{N}_0} |x_k|. \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir umgekehrt zeigen, dass wir bei Stabilität auch die absolute Summierbarkeit vorfinden. Sei C die Stabilitätskonstante aus (13). Zu einem festen Index n_0 betrachten wir die aus der Impulsantwort gebildete Folge

$$x_k := \begin{cases} \text{sign}(g_{n_0-k}) & k = 0, \dots, n_0 \\ 0 & k > n_0, \end{cases}$$

die offensichtlich mit eins beschränkt ist. Die zugehörige Ausgangsfolge $(y_k)_{k=0}^\infty$ ist damit mit C beschränkt. Außerdem gilt:

$$C \geq y_{n_0} = \sum_{n=0}^{n_0} x_{n_0-n} g_n = \sum_{n=0}^{n_0} \text{sign}(g_n) g_n = \sum_{n=0}^{n_0} |g_n|.$$

Die Abschätzung $\sum_{n=0}^{n_0} |g_n| \leq C$ gilt nun für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass auch $\sum_{n=0}^\infty |g_n| \leq C$ gilt, womit die absolute Summierbarkeit gezeigt ist. ■

Man beachte, dass beim Nachweis der absoluten Summierbarkeit im Beweis zu jedem Wert von n_0 eine andere Folge $(x_k)_{k=0}^\infty$ konstruiert wird. Daher wird tatsächlich die von der konkreten Folge unabhängige Konstante C aus (13) benötigt. Die Definition der Stabilität würde dagegen zunächst für jede Folge nur sicherstellen, dass es eine von dieser Folge abhängende Konstante C gibt. Damit kann aber nicht auf $\sum_{n=0}^\infty |g_n| \leq C$ geschlossen werden. So einfach, wie in [11, S. 230] suggeriert, ist der Beweis also anscheinend nicht. Häufig, wie z. B. in [15, S.294], wird daher auch nur die einfachere Richtung bewiesen, dass aus der absoluten Summierbarkeit der Impulsantwort die Stabilität folgt.

Mit dem Lemma folgt die Stabilität der beiden Beispiele aus der Einleitung: Die Impulsantwort $(0, 1, 0, 0, \dots)$ der Verschiebung ist offensichtlich absolut summierbar, und auch die Impulsantwort $(1, -0,001, 0,999 \cdot (-0,001), (0,999)^2 \cdot (-0,001), \dots)$ des Filters (1) ist wegen der geometrischen Reihe absolut summierbar:

$$\begin{aligned} & 1 + 0,001 + 0,999 \cdot 0,001 + (0,999)^2 \cdot 0,001 + \dots \\ &= 1 + 0,001 \cdot \sum_{k=0}^\infty (0,999)^k = 1 + \frac{1}{1 - 0,999} = 1001. \end{aligned}$$

Aus der absoluten Summierbarkeit der Impulsantwort $(g_k)_{k=0}^\infty$ folgt direkt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0$ sein muss, da sonst die Reihe nicht konvergieren könnte. Die Erregung des Systems durch einen Impuls führt also asymptotisch wieder in den „Nullzustand“ zurück.

Die Übertragungsfunktion $G(z) = \sum_{k=0}^\infty g_k z^{-k}$ eines stabilen Abtastsystems ist für $|z| \geq 1$ erklärt, da wir mit $|g_k z^{-k}| \leq |g_k|$ und $\sum_{k=0}^\infty |g_k| < \infty$ eine konvergente Majorante haben. Alle Pole der gebrochen-rationalen Funktion $G(z)$ müssen daher innerhalb des Einheitskreises liegen, also einen Betrag kleiner eins haben. Es gilt auch die Umkehrung. Wenn die (maximal n)

Pole alle einen Betrag kleiner eins haben, dann hat die Potenzreihe $\sum_{k=0}^\infty g_k z^k$ einen Konvergenzradius größer als eins. Da Potenzreihen innerhalb des Konvergenzradius absolut konvergieren, konvergiert insbesondere die Reihe für $z = 1$ absolut: $\sum_{k=0}^\infty |g_k| < \infty$:

Folgerung 5.1 (Stabilität und Pole) Ein lineares, zeitinvariantes Abtastsystem ist genau dann stabil, wenn alle Pole der Übertragungsfunktion echt innerhalb des Einheitskreises liegen.

Diese Charakterisierung lässt sich auch wie folgt motivieren: Schreibt man die Übertragungsfunktion mit einer Partialbruchzerlegung, so gibt es zu den Polen a Summanden $c/(z - a)$. Multiplikation der Z-Transformierten $X(z)$ einer Eingangsfolge $(x_k)_{k=0}^\infty$ mit einem solchen Summanden entspricht einer Faltung der Folge $(x_k)_{k=0}^\infty$ mit der Folge $(0, 1, a, a^2, a^3, \dots)$, siehe (2). Ist die Eingangsfolge beschränkt, dann gilt dies im Fall $|a| < 1$ auch für die aus der Faltung entstehende Folge $(y_k)_{k=0}^\infty$:

$$\begin{aligned} |y_k| &= \left| \sum_{n=1}^k x_{k-n} a^{n-1} \right| \leq \sum_{n=1}^k |x_{k-n}| |a|^{n-1} \\ &\leq \left[\sup_{n \in \mathbb{N}_0} |x_n| \right] \sum_{n=1}^k |a|^{n-1}, \end{aligned}$$

da bei der Abschätzung eine konvergente geometrische Reihe entsteht. Die Abschätzung scheitert allerdings, wenn $|a| \geq 1$ ist.

Bei den beiden Beispielen der Einleitung sind die Pole 0 bzw. 0,999, so dass die bereits über die absolute Summierbarkeit der Impulsantwort gezeigte Stabilität noch einmal bestätigt wird.

6 Frequenzgang

Die Übertragungsfunktion ist eine Funktion einer komplexen Variablen. Bei der digitalen Signalverarbeitung und in der Regelungstechnik ist es üblich, durch die Wahl $z = \exp(j\omega)$ zu einer Funktion der reellen Variablen ω zu wechseln. Aus der Übertragungsfunktion $G(z)$ wird der **Frequenzgang** $G(\exp(j\omega))$ als Abbildung von $[0, 2\pi[$ nach \mathbb{C} . Ist ein lineares zeitinvariantes Abtastsystem stabil, dann liegen alle Pole innerhalb des Einheitskreises, d. h., die Funktion $G(z^{-1})$ lässt sich als Potenzreihe mit Konvergenzradius größer eins schreiben, so dass der Einheitskreis

im holomorphen Bereich liegt. Nach dem Cauchy-Integralsatz lassen sich daher alle Werte $G(z^{-1})$ für $|z| \leq 1$ aus den Werten von $G(\exp(-j\omega))$, $\omega \in [0, 2\pi[$, berechnen. Gehen wir zum Kehrwert der Variable über, dann sehen wir, dass $G(z)$ für $|z| \geq 1$ vollständig über die Werte $G(\exp(j\omega))$ bestimmt und berechenbar ist. In diesem Sinne beschreibt der Frequenzgang die Übertragungsfunktion vollständig.

Bei digitalen Filtern kann man den Einfluss des Filters auf die Frequenzbestandteile eines Signals am Frequenzgang erkennen. Um das zu verstehen, wenden wir zur Frequenzanalyse die Fourier-Transformation an. Dazu interpretieren wir die Eingangsfolge $(x_k)_{k=0}^\infty$ und die Ausgangsfolge $(y_k)_{k=0}^\infty$ als Funktionswerte von Fourier-transformierbaren Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x_k = f(k)$ und $y_k = g(k)$. So können wir die Differenzengleichung (7) als Gleichung für Funktionen auffassen:

$$g(t) + a_{n-1}g(t-1) + \dots + a_0g(t-n) = b_n f(t) + b_{n-1}f(t-1) + \dots + b_0f(t-n).$$

Wenn wir nun beide Seiten Fourier-transformieren, wobei z. B. die Fourier-Transformierte $f^\wedge(\omega)$ von $f(t)$ definiert ist über $f^\wedge(\omega) := \int_{-\infty}^\infty f(t) \exp(-j\omega t) dt$, so erhalten wir mit der Verschiebungsregel $[f(t+h)]^\wedge(\omega) = e^{jh\omega} f^\wedge(\omega)$ und der Linearität der Transformation die Gleichung

$$g^\wedge(\omega) + a_{n-1}e^{-j\omega}g^\wedge(\omega) + \dots + a_0e^{-jn\omega}g^\wedge(\omega) = b_n f^\wedge(\omega) + b_{n-1}e^{-j\omega}f^\wedge(\omega) + \dots + b_0e^{-jn\omega}f^\wedge(\omega).$$

Jetzt sehen wir über den Quotienten $f^\wedge(\omega)/g^\wedge(\omega)$, wie sich zu Frequenzen ω die komplexen Amplituden $g^\wedge(\omega)$ der Ausgangsfunktion g zu den komplexen Amplituden $f^\wedge(\omega)$ der Eingangsfunktion verhalten:

$$\frac{g^\wedge(\omega)}{f^\wedge(\omega)} = \frac{b_n + b_{n-1}e^{-j\omega} + \dots + b_0e^{-jn\omega}}{1 + a_{n-1}e^{-j\omega} + \dots + a_0e^{-jn\omega}} = G(e^{j\omega}).$$

Das über (1) definierte Filter hat den Frequenzgang $\frac{e^{j\omega}-1}{e^{j\omega}-0,999}$ und ist ein Hochpassfilter. So wird der Frequenzgang für $\omega = 0$ null, diese Frequenz, also der Gleichanteil, wird nicht durchgelassen. Wir sehen uns das Verhalten auch für Frequenzen $\omega > 0$ an:

Die Werte des Frequenzgangs sind wie bei der Übertragungsfunktion komplex und lassen sich daher über ihren Betrag $A(\omega)$ und ihren Winkel (Phase) $\varphi(\omega)$ schreiben, d. h. $G(j\omega) = A(\omega) \exp(j\varphi(\omega))$. Die reelle Funktion $A(\omega)$ heißt der **Amplitudengang**, und die

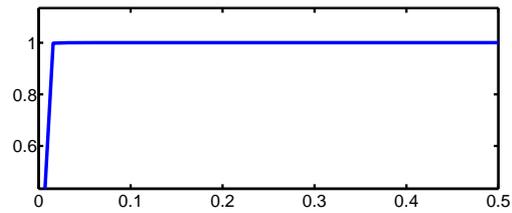


Abbildung 3: Amplitudengang des Hochpassfilters (1): Auf der horizontalen Achse ist ω , auf der vertikalen ist die Amplitude $\left| \frac{e^{j\omega}-1}{e^{j\omega}-0,999} \right|$ abgetragen.

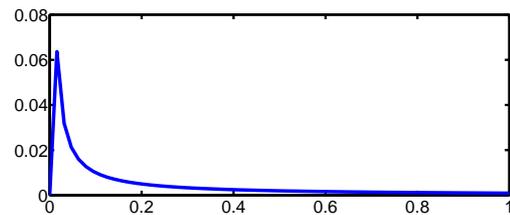


Abbildung 4: Phasengang $\varphi(\omega)$ des Hochpassfilters (1): Auf der horizontalen Achse ist ω , auf der vertikalen ist $\varphi(\omega)$ abgetragen.

reelle Funktion $\varphi(\omega)$ der **Phasengang**. Die Darstellung ihrer Funktionsgraphen heißt **Bode-Diagramm**. Für das Filter (1) ist das Bodediagramm in die Abbildungen 3 und 4 aufgeteilt. Ist für ein ω der Amplitudengang 1 und der Frequenzgang 0, so wird der entsprechende Frequenzanteil der Eingangsfolge nicht verändert. Damit bestätigt sich anhand der Diagramme die Vermutung, dass (1) ein Hochpassfilter ist.

Kennt man die Lage der Pole und Nullstellen der Übertragungsfunktion G , dann kann man näherungsweise auf das Aussehen des Amplitudengangs schließen: Ist ω der Winkel einer komplexen Polstelle von G , dann ist zu erwarten, dass $A(\omega)$ groß ist. Ist dagegen ω der Winkel einer Nullstelle von G , so ist $A(\omega)$ eher klein. Dieser Zusammenhang folgt aus der Stetigkeit der Übertragungsfunktion auf \mathbb{C} abzüglich der Menge der Pole. Liegen Pole und Nullstellen nicht zu weit vom Einheitskreis entfernt, dann wirken sie sich entsprechend auf die Werte von G auf dem Einheitskreis aus.

Fasst man den Frequenzgang $G(\exp(j\omega))$ als Parametrisierung einer geschlossenen Kurve auf, die Winkel $\omega \in [0, 2\pi]$ auf Punkte der komplexen Ebene abbildet (siehe Abbildung 5), dann kann man unter Berücksichtigung der Umlaufrichtung ebenfalls durch die Entfer-

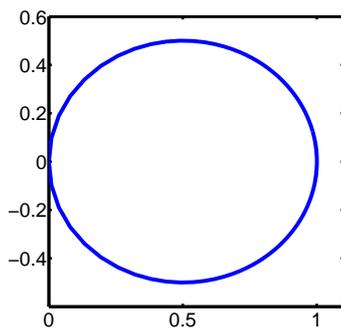


Abbildung 5: Ortskurve des Filters (1) mit Punkten $\frac{e^{j\omega}-1}{e^{j\omega}-0,999}$ für $\omega \in [0, 2\pi]$: Dem Wert $\omega = 0$ entspricht der Punkt im Koordinatenursprung. Dann wird von hier ausgehend die Kurve im Uhrzeigersinn, also im mathematisch negativen Sinn, durchlaufen.

nung der Kurvenpunkte vom Nullpunkt ungefähr den Amplitudengang $A(\omega)$ ablesen. Die Kurve wird als **Ortskurve** bezeichnet.

7 Schlussbemerkung

Da die Z-Transformation hinsichtlich Differenzen ein ähnliches Verhalten wie die Laplace-Transformation hinsichtlich Ableitungen zeigt, lassen sich Differenzgleichungen unter der Z-Transformation in der gleichen Weise mittels Übertragungsfunktionen lösen, wie es für lineare Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit der Laplace-Transformation gelingt. Der BIBO-Stabilitätsbegriff entspricht der in der Funktionalanalysis verwendeten Stetigkeit linearer Abbildungen. Entsprechend helfen Sätze der Funktionalanalysis, um die verschiedenen Charakterisierungen der Stabilität ineinander zu überführen.

Dank

Ganz herzlich möchte ich mich bei Prof. Dr. Christoph Dalitz und Prof. Dr. Hans-Günter Hirsch für Ihre konstruktive Kritik bedanken.

Literatur

- [1] R. El Attar, *Lecture Notes on Z-Transform*. Morrisville, NC.: Lulu Press, 2005.
- [2] F. Bening, *Z-Transformation für Ingenieure*. Stuttgart: Teubner, 1995.
- [3] G. Doetsch, *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation*. München: Oldenbourg, 1989.
- [4] O. Föllinger, *Laplace- Fourier- und z-Transformation*. Berlin: VDE Verlag, 2011.
- [5] O. Föllinger, *Regelungstechnik: Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Berlin: VDE Verlag, 2013.
- [6] B. Girod, R. Rabenstein und A. Stenger, *Einführung in die Systemtheorie: Signale und Systeme in der Elektrotechnik und Informationstechnik*. Wiesbaden: Teubner, 2007.
- [7] St. Goebbels und St. Ritter, *Mathematik anwenden und verstehen*. Heidelberg: Springer-Spektrum, 2013.
- [8] U. Graf, *Applied Laplace Transforms and z-Transforms for Scientists and Engineers*. Basel: Birkhäuser, 2004.
- [9] H. Heuser, *Funktionalanalysis*. Wiesbaden: Teubner, 2006.
- [10] E. I. Jury, *Theory and Application of the z-Transform Method*. New York, NY.: Wiley, 1964.
- [11] B. P. Lathi, *Linear Systems and Signals*. Carmichael, CA.: Berkeley-Cambridge Press, 1992.
- [12] W. Preuß, *Funktionaltransformationen*. München: Fachbuchverlag Leipzig/Hanser, 2002.
- [13] J. R. Ragazzini und L. A. Zadeh, "The analysis of sampled-data systems," in *Trans. Am. Inst. Elec. Eng.*, 71 (2), S. 225–234, 1952.
- [14] A. D. Sokal, "A really simple elementary proof of the uniform boundedness theorem," *Am. Math. Mon.*, 118 (5), S. 450–452, 2011.
- [15] W. Strampp und E. V. Vorozhtsov, *Mathematische Methoden der Signalverarbeitung*. München: Oldenbourg, 2004.

- [16] H. Unbehauen, *Regelungstechnik 2*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2009.
- [17] H. Weber und H. Ulrich, *Laplace- Fourier- und z-Transformation*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, 2011.

Erratum zum technischen Bericht „Mathematik der Z-Transformation“

Steffen Goebels, 09. Oktober 2017

Ich danke allen Lesern, die mich auf Fehler hingewiesen haben.

Seite 13, rechte Spalte

gedruckt:

Aufgrund der Differenzgleichung ist

$$\begin{aligned} |L_m((x_k)_{k=0}^\infty)| &= |y_m| = |-a_{n-1}y_{m-1} - \dots - a_0y_{m-n} + b_nx_m + b_{n-1}x_{m-1} + \dots + b_0x_{m-n}| \\ &\leq \max\{|a_0|, \dots, |a_{n-1}|\} \max\{|y_0|, \dots, |y_{m-1}|\} + \max\{|b_0|, \dots, |b_n|\} \|(x_k)_{k=0}^\infty\|_\infty. \end{aligned}$$

Indem wir nun den größten Wert von $|y_0|, \dots, |y_{m-1}|$ entsprechend abschätzen und iterativ fortfahren, erhalten wir

$$|L_m((x_k)_{k=0}^\infty)| \leq \left[\sum_{k=0}^m (\max\{|a_0|, \dots, |a_{n-1}|\})^k \right] \cdot \max\{|b_0|, \dots, |b_n|\} \|(x_k)_{k=0}^\infty\|_\infty =: C_m \|(x_k)_{k=0}^\infty\|_\infty.$$

korrekt:

Aufgrund der Differenzgleichung gilt:

$$\begin{aligned} |L_m((x_k)_{k=0}^\infty)| &= |y_m| = |-a_{n-1}y_{m-1} - \dots - a_0y_{m-n} + b_nx_m + b_{n-1}x_{m-1} + \dots + b_0x_{m-n}| \\ &\leq \max\{|y_0|, \dots, |y_{m-1}|\} \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| + \|(x_k)_{k=0}^\infty\|_\infty \sum_{k=0}^n |b_k|. \end{aligned}$$

Indem wir nun den größten Wert von $|y_0|, \dots, |y_{m-1}|$ entsprechend abschätzen und iterativ fortfahren, erhalten wir

$$|L_m((x_k)_{k=0}^\infty)| \leq \left[\sum_{i=0}^m \left(\sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right)^i \right] \left[\sum_{k=0}^n |b_k| \right] \|(x_k)_{k=0}^\infty\|_\infty =: C_m \|(x_k)_{k=0}^\infty\|_\infty.$$